

Politechnika Rzeszowska  
**Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa**

Katedra Samolotów i Silników Lotniczych

Pomoce dydaktyczne  
Wytrzymałość Konstrukcji Lotniczych

*Wyznaczanie sił i momentów przekrojowych  
w jednoobwodowych ramach ściśle płaskich*

*Przykład rozwiązania metodą przecięć oraz metodą przegubów*

Łukasz Święch

*Rzeszów, 2013*



# Spis treści

1. Wstęp.....	5
2. Geometria i obciążenie przykładowej ramy .....	7
3. Metody rozwiązywania .....	8
3.1. Metoda „przecięć” .....	8
3.2. Metoda „przegubów” .....	17
4. Porównanie wyników.....	29
Literatura .....	30



## 1. WSTĘP

Wyznaczanie sił i momentów przekrojowych w jednoobwodowej ramie ściśle płaskiej, jest zagadnieniem 3-krotnie statycznie niewyznaczalnym.

*W konstrukcji statycznie niewyznaczalnej, zamienionej myślowo na statycznie wyznaczalną przez wprowadzenie dodatkowych przecięć, wartości niewiadomych sił statycznie niewyznaczalnych są tak dobrane, iż w miejscach dodatkowych przecięć zachodzi ciągłość przemieszczeń.<sup>1</sup>*

Obliczenia podzielone są na następujące etapy:

- I. Zamiana ustroju na statycznie wyznaczalny z wprowadzeniem wielkości statycznie niewyznaczalnych i określeniem ich liczby.
- II. Podział obciążenia statycznie wyznaczalnej konstrukcji na stany: zerowy i stany kolejnego obciążenia siłami jednostkowymi
- III. Sformułowanie układu równań Maxwella – Mohra z warunku ciągłości przemieszczeń.
- IV. Wyznaczenie współczynników równań według jednolitego schematu i rozwiązanie układu.

W przypadku ramy zamkniętej, podpartej w sposób statycznie wyznaczalny, zagadnienie poszukiwania wielkości sił i momentów przekrojowych jest trzykrotnie, wewnątrz statycznie niewyznaczalne. Równania ciągłości przemieszczeń (równania Maxwella-Mohra) dla tego typu ustroju przyjmą, postać:

$$\begin{aligned}\alpha_{10} + \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 &= 0 \\ \alpha_{20} + \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3 &= 0 \\ \alpha_{30} + \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + \alpha_{33}X_3 &= 0\end{aligned}\tag{1.1a}$$

W notacji macierzowej powyższy układ równań można zapisać, jako:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \end{bmatrix}\tag{1.1b}$$

gdzie:

$$\alpha_{i0} = \oint_s \frac{Mg^{(0)}mg^{(i)}}{EI} ds, \quad \alpha_{ij} = \oint_s \frac{mg^{(i)}mg^{(j)}}{EI} ds; \quad i, j = 1, 2, 3\tag{1.2a}$$

W przypadku stałej sztywności i jednorodnego materiału elementów ramy, otrzymujemy:

$$\alpha_{i0} = \frac{1}{EI} \oint_s Mg^{(0)}mg^{(i)} ds, \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{EI} \oint_s mg^{(i)}mg^{(j)} ds; \quad i, j = 1, 2, 3\tag{1.2b}$$

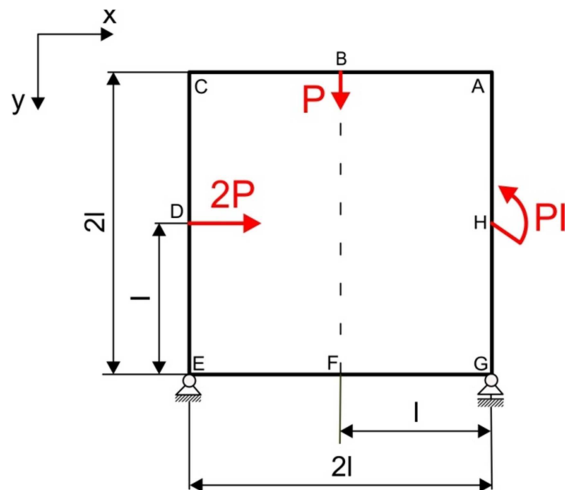
<sup>1</sup> Brzoska Z.: *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*

Przyjęte reguły znaków:

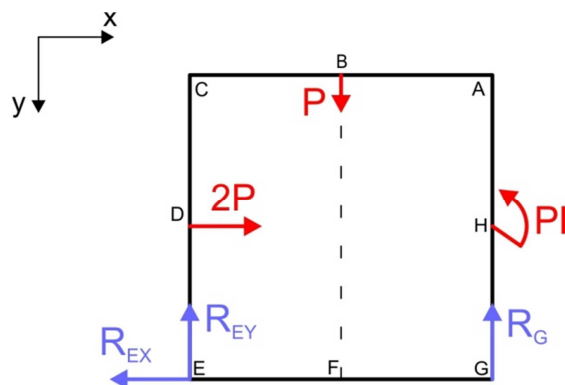
- Moment gnący – uznawany za dodatni, jeżeli „wygina” element ramy wypukłością do wewnątrz obwodu.
- Siła tnąca – dodatnia, jeżeli „obraca” element ramy przeciwnie do kierunku trygonometrycznego (zgodnie z ruchem wskazówek zegara)
- Siła normalna – dodatnia, jeżeli rozciąga element ramy.

## 2. GEOMETRIA I OBCIĄŻENIE PRZYKŁADOWEJ RAMY

Stan początkowy. Układ statycznie, zewnętrznie wyznaczalny. Układ statycznie, wewnętrznie, trzykrotnie niewyznaczalny.



Rys.1. Wymiary i obciążenie ramy



Rys.2. Schemat statyczny ramy

Układ jest statycznie zewnętrznie wyznaczalny, dzięki czemu możliwym jest wyznaczenie wartości sił podporowych (reakcji) ze statycznych równań równowagi:

$$(2.1) \quad \Sigma P_i(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2P - R_{Ex} = 0$$

$$(2.2) \quad \Sigma P_i(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P - R_{Ey} - R_G = 0$$

$$(2.3) \quad \Sigma M_i(G) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Pl - 2Pl + R_{Ey}2l + Pl = 0$$

Rozwiązanie układu równań (2.1-2.3) prowadzi do wielkości:

$$R_{Ex} = 2P \qquad R_{Ey} = 0 \qquad R_G = P \qquad (2.4)$$

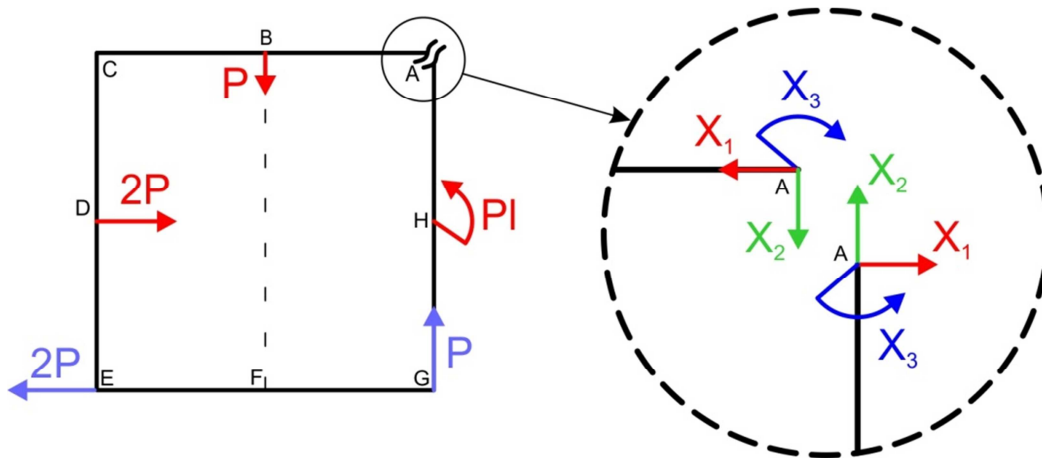
### 3. METODY ROZWIĄZYWANIA

#### 3.1. METODA „PRZECIĘĆ”

##### Podział obciążenia na stany proste

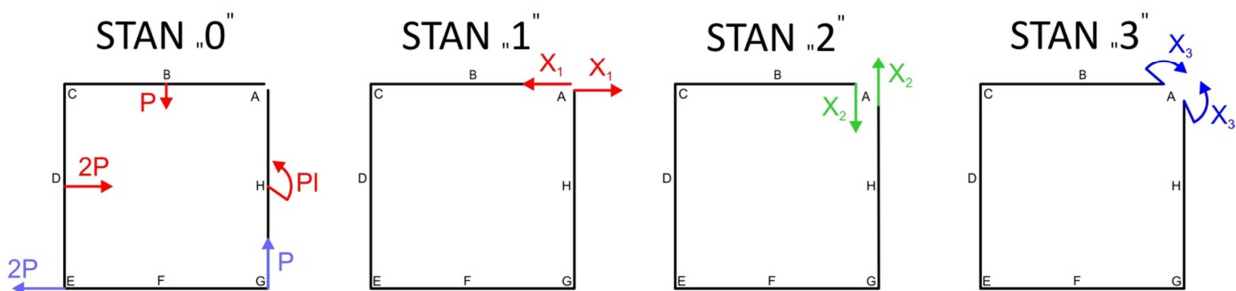
Metoda polega na myślowym przecięciu obwodu ramy, sprowadzającego konstrukcję do stanu statycznej wyznaczalności wewnętrznej.

W miejscu wprowadzenia rozciętego myślowo przekroju należy uwzględnić występowanie wzajemnego oddziaływania elementów w postaci dwóch sił  $X_1$ ,  $X_2$  oraz momentu gnącego  $X_3$  (rys.2).



Rys.2. Niewiadome siły i momenty w miejscu przecięcia

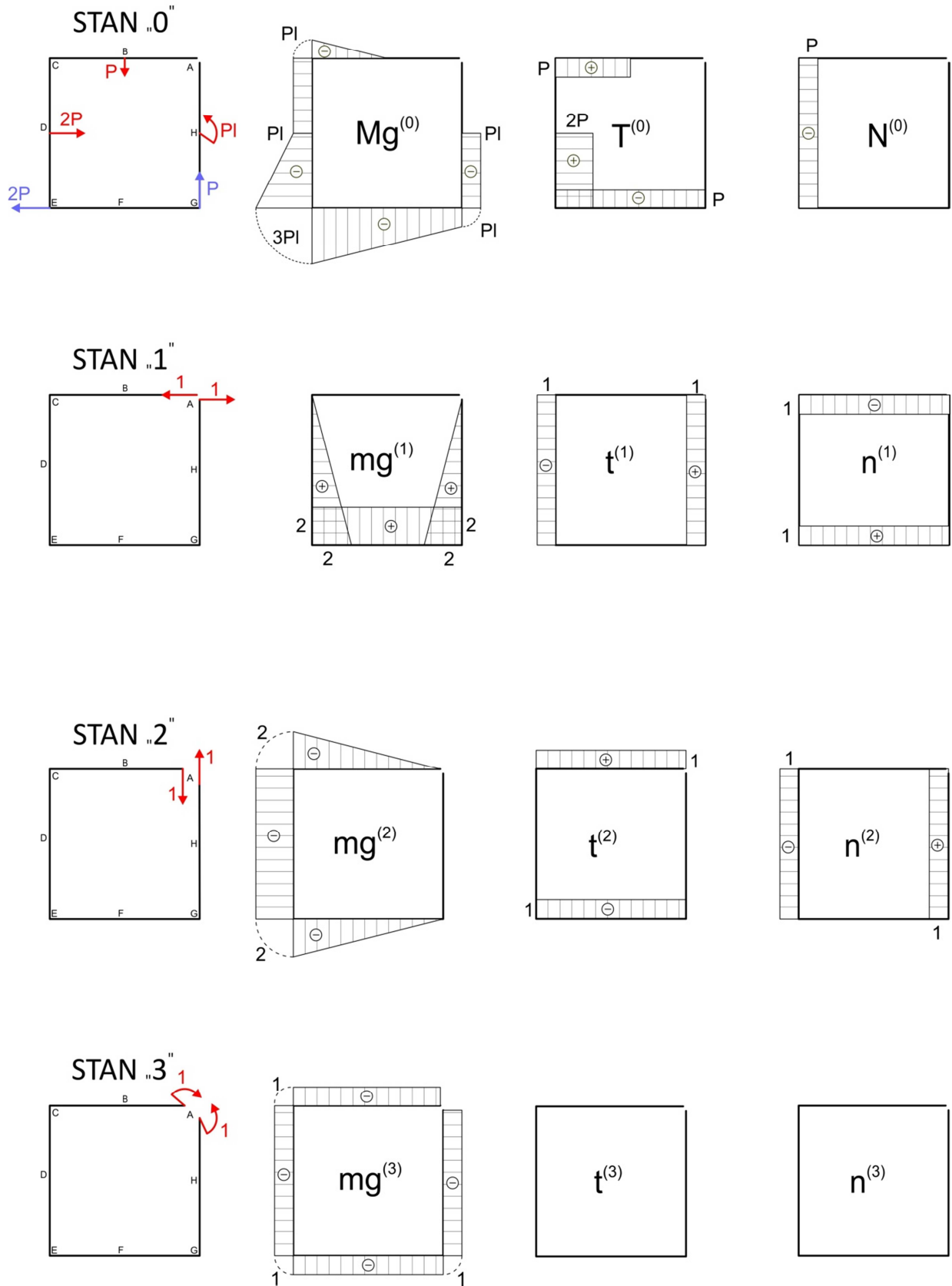
Następnie koniecznym jest rozdzielenie złożonego stanu obciążenia na cztery proste, statycznie wyznaczalne stany 0, 1, 2 i 3 (rys.3).



Rys.3. Podział obciążenia na stany proste, statycznie wyznaczalne

Dla każdego stanu należy wyznaczyć przebieg momentów gnących ( $Mg^{(0)}, mg^{(1)}, mg^{(2)}, mg^{(3)}$ ), sił tnących ( $T^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}$ ) oraz sił normalnych ( $N^{(0)}, n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$ ). Rysunek 4 przedstawia wykresy powyższych wartości na tle geometrii ramy, odpowiednio w stanach 0,1,2 i 3.





Rys.4. Wykresy sił i momentów przekrojowych

### Wyznaczanie współczynników we wzorach Maxwell'a - Mohr'a

Występujące we wzorach (1.2b) wyrażenia podcałkowe mają postać iloczynu dwóch funkcji. Jeżeli co najmniej jedna z tych funkcji jest liniowa, całkowanie można uprościć korzystając z metody [2], według której całka z iloczynu dwóch funkcji, jednej dowolnej  $Y(x)$  i drugiej liniowej  $y(x) = ax + b$  wyraża się zależnością:

$$\int_{x_1}^{x_2} Y(x)y(x)dx = F(ax_{sc} + b) = Fy_{sc}$$

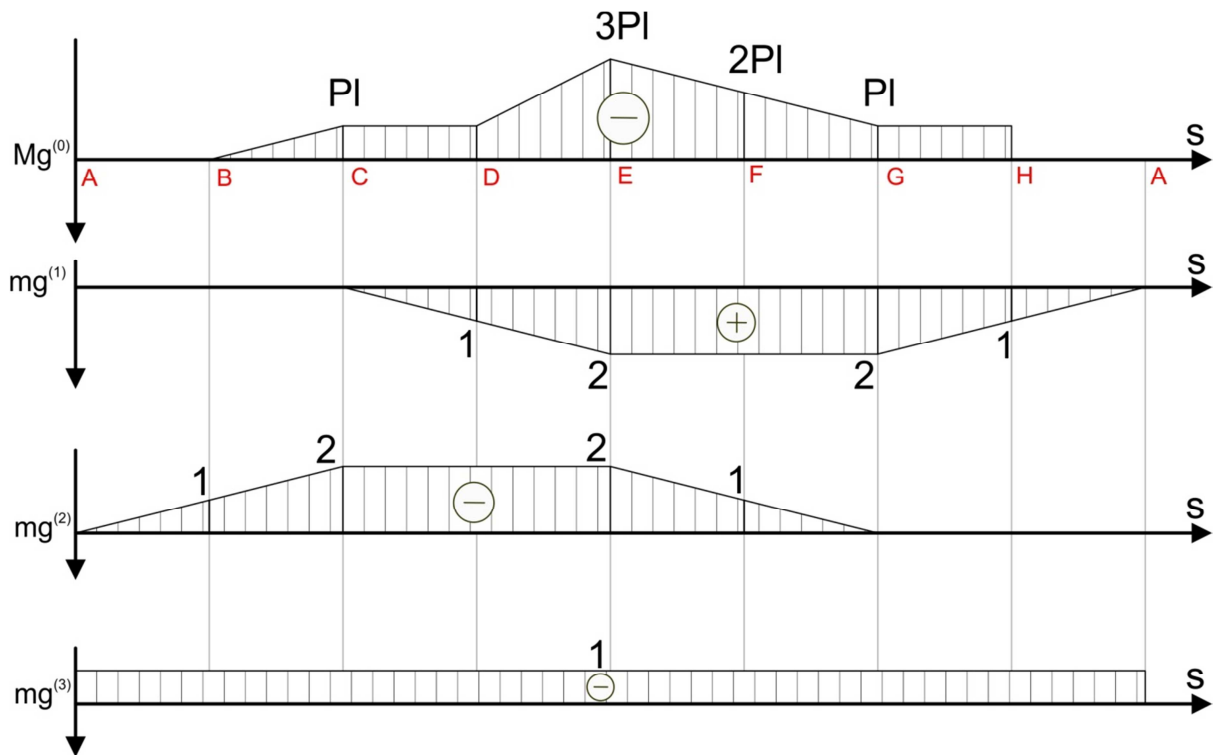
W praktyce, dla typowych przypadków, do wyznaczania wartości całek wykorzystuje się uszeregowane tablice rys 5.

Wykres Y \ Wykres y				
	$acl$	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{2}a(c+d)l$
	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{3}acl$	$\frac{1}{6}acl\left(1 + \frac{x'}{l}\right)$	$\frac{1}{6}a(2c+d)l$
	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{6}acl$	$\frac{1}{6}acl\left(1 + \frac{x}{l}\right)$	$\frac{1}{6}a(c+2d)l$
	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{6}acl\left(1 + \frac{x'}{l}\right)$	$\frac{1}{3}acl$	$\frac{1}{6}al\left[c\left(1 + \frac{x'}{l}\right) + d\left(1 + \frac{x}{l}\right)\right]$
	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{4}acl$	$\frac{1}{2} \frac{acl}{x'}\left(\frac{l}{2} - \frac{2x^2}{3l}\right)$	$\frac{1}{4}a(c+d)l$
	$\frac{1}{2}(a+b)cl$	$\frac{1}{6}c(2a+b)l$	$\frac{1}{6}cl\left[a\left(1 + \frac{x'}{l}\right) + b\left(1 + \frac{x}{l}\right)\right]$	$\frac{1}{6}[c(2a+b) + d(2b+a)]l$

Rys.5. Szereg typowych wartości  $\int Yydx$  zaczerpnięte z literatury<sup>2</sup>

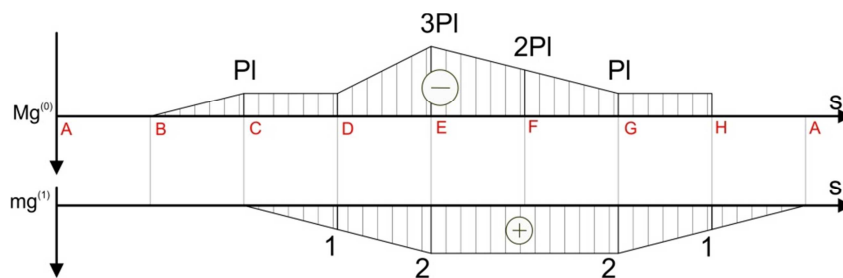
W celu podwyższenia przejrzystości wyników, na potrzeby wyznaczania całek  $\int Yydx$ , warto „rozwinąć” wykres momentu gnącego wzdłuż długości ramy (rys.6.)

<sup>2</sup> Ibid.

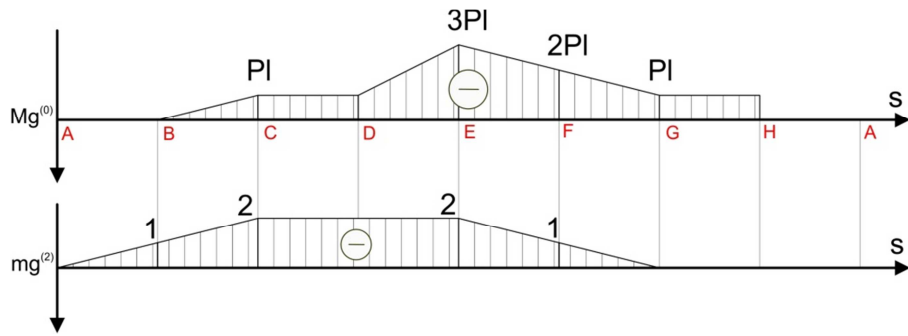


Rys.6. Wykresy momentów gnących w stanach 0,1,2 i 3

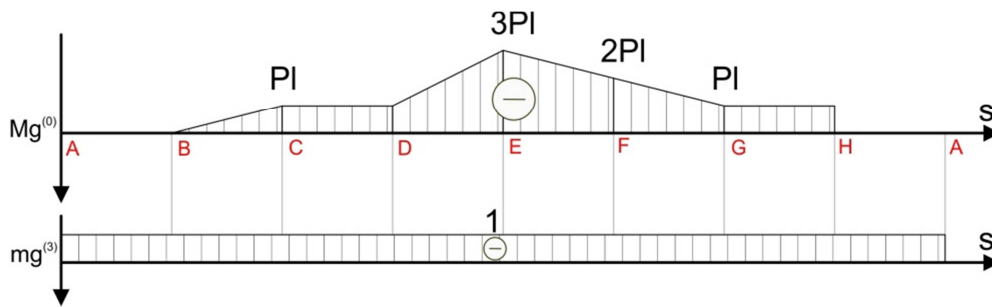
Poniższe rysunki i obliczenia dokumentują przebieg czynności prowadzących do wyznaczenia poszczególnych współczynników we wzorach (1.1).



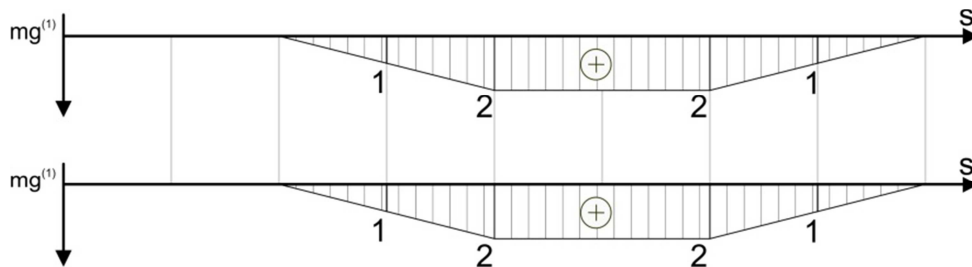
$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ 0 + 0 + \left[ \frac{1}{2} (-Pl) \cdot 1 \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} l [(-Pl)(2 \cdot 1 + 2) + (-3Pl)(1 + 2 \cdot 2)] \right] + \left[ \frac{1}{2} (-3Pl + 2(-Pl)) \cdot 2 \cdot l \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{2} ((-2Pl) + (-Pl)) \cdot 2 \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{2} (-Pl)(2 + 1) \cdot l \right] + 0 \right\} = -13 \frac{1}{6} \frac{Pl}{EI} \end{aligned}$$



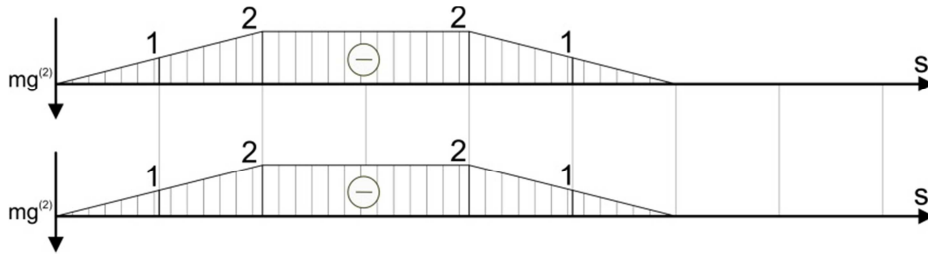
$$\alpha_{20} = \frac{1}{EI} \left\{ 0 + \left[ \frac{1}{6}(-Pl)(-1 + 2(-2)) \cdot l \right] + [(-Pl)(-2) \cdot l] + \left[ \frac{1}{2}(-Pl + (-3Pl)) \cdot (-2) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6}l[(-3Pl)(2 \cdot (-2) + (-1)) + (-2Pl)(-2 + 2 \cdot (-1))] \right] + \left[ \frac{1}{6}(2(-2Pl) + (-Pl))(-1) \cdot l \right] + 0 \right\} = 11 \frac{1}{2} \frac{Pl}{EI}$$



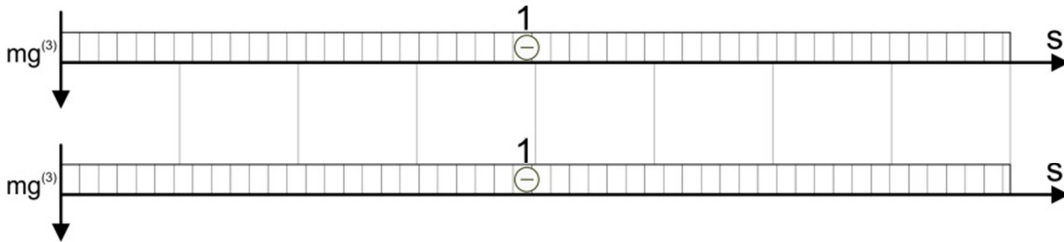
$$\alpha_{30} = \frac{1}{EI} \left\{ 0 + \left[ \frac{1}{2}(-Pl)(-1) \cdot l \right] + [(-Pl)(-1) \cdot l] + \left[ \frac{1}{2}(-Pl + (-3Pl))(-1) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{2}(-3Pl + (-2Pl))(-1) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{2}(-2Pl + (-Pl))(-1) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6}(2(-2Pl) + (-Pl))(-1) \cdot l \right] + 0 \right\} = 8 \frac{1}{2} \frac{Pl}{EI}$$



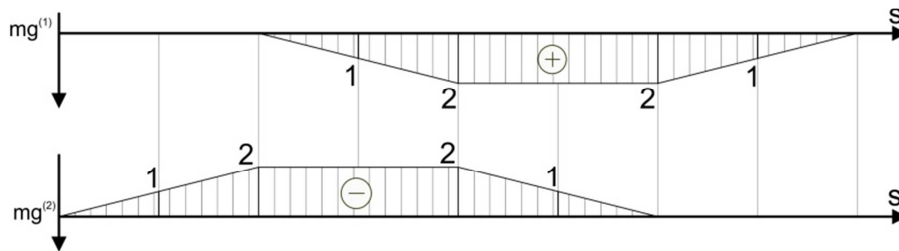
$$\alpha_{11} = \frac{1}{EI} \left\{ 0 + 0 + \left[ \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2l \right] + [2 \cdot 2 \cdot 2l] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2l \right] \right\} = 13 \frac{1}{3} \frac{1}{EI}$$



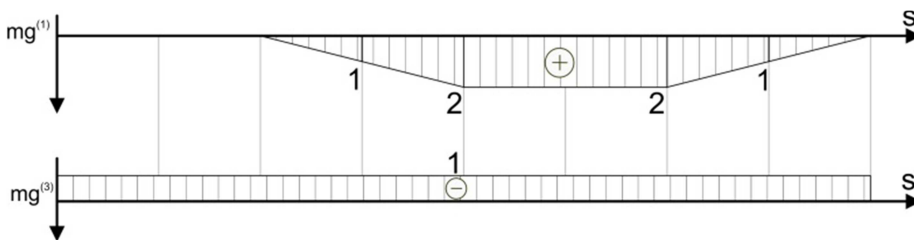
$$\alpha_{22} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 2l \right] + [(-2) \cdot (-2) \cdot 2l] + \left[ \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 2l \right] + 0 + 0 \right\} = 13 \frac{1}{3} \frac{1}{EI}$$



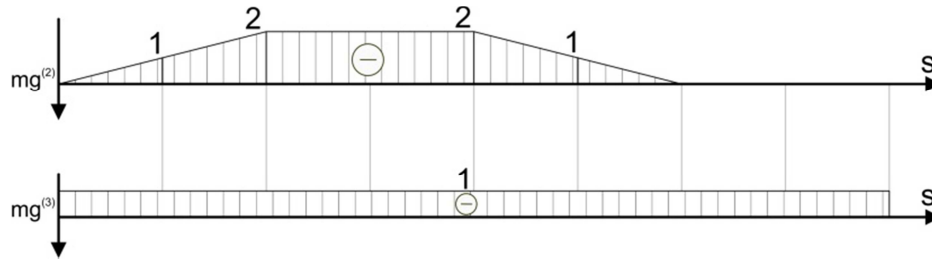
$$\alpha_{33} = \frac{1}{EI} \{ (-1) \cdot (-1) \cdot 8l \} = 8 \frac{1}{2} \frac{1}{EI}$$



$$\alpha_{12} = \frac{1}{EI} \left\{ 0 + 0 + \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2l \right] + 0 + 0 \right\} = -8 \frac{1}{EI}$$



$$\alpha_{13} = \frac{1}{EI} \left\{ 0 + 0 + \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2l \right] + [2 \cdot (-1) \cdot 2l] + \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2l \right] \right\} = -8 \frac{1}{EI}$$



$$\alpha_{23} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 2l \right] + [(-2) \cdot (-1) \cdot 2l] + \left[ \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 2l \right] + 0 + 0 \right\} = 8 \frac{1}{EI}$$

Pozostałe wartości współczynników przyjmuje się jako:

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} \qquad \alpha_{31} = \alpha_{13} \qquad \alpha_{32} = \alpha_{23}$$

Po uwzględnieniu otrzymanych wyników układ równań Maxwella-Mohra (1.1b) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 13 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} & -8 \frac{1}{EI} & -8 \frac{1}{EI} \\ -8 \frac{1}{EI} & 13 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} & 8 \frac{1}{EI} \\ -8 \frac{1}{EI} & 8 \frac{1}{EI} & 8 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -13 \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{EI} \\ 11 \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{EI} \\ 8 \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

W celu wyznaczenia nieznanych wielkości  $X_1, X_2$  oraz  $X_3$  należy przekształcić równanie (3.1) do postaci:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} & -8 \frac{1}{EI} & -8 \frac{1}{EI} \\ -8 \frac{1}{EI} & 13 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} & 8 \frac{1}{EI} \\ -8 \frac{1}{EI} & 8 \frac{1}{EI} & 8 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} -13 \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{EI} \\ 11 \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{EI} \\ 8 \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{EI} \end{bmatrix} \right)$$

Rozwiązanie układu równań prowadzi do wartości:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{7}{8} Pl \\ X_2 = -\frac{9}{16} Pl \\ X_3 = \frac{3}{8} Pl \end{cases}$$

Siły i momenty przekrojowe w poszczególnych punktach konstrukcji obliczamy z zależności:

$$\begin{aligned} Mg &= Mg^{(0)} + mg^{(1)}X_1 + mg^{(2)}X_2 + mg^{(3)}X_3 \\ T &= T^{(0)} + t^{(1)}X_1 + t^{(2)}X_2 + t^{(3)}X_3 \\ N &= n^{(0)} + n^{(1)}X_1 + n^{(2)}X_2 + n^{(3)}X_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Przykładowo dla punktu E otrzymujemy:

$$Mg^E = -3Pl + 2 \cdot \frac{7}{8}Pl + (-2) \cdot \left(-\frac{9}{16}Pl\right) + (-1) \cdot \frac{3}{8}Pl = -\frac{1}{2}Pl$$

Siła tnąca przyjmuje w punkcie E dwie wartości (skok spowodowany jest przyłożoną w tym punkcie siłą – patrz rys.4)

$$T^E = 2P + \left(-\frac{1}{l}\right) \cdot \frac{7}{8}Pl + 0 \cdot \left(-\frac{9}{16}Pl\right) + 0 \cdot \frac{3}{8}Pl = \frac{9}{8}P$$

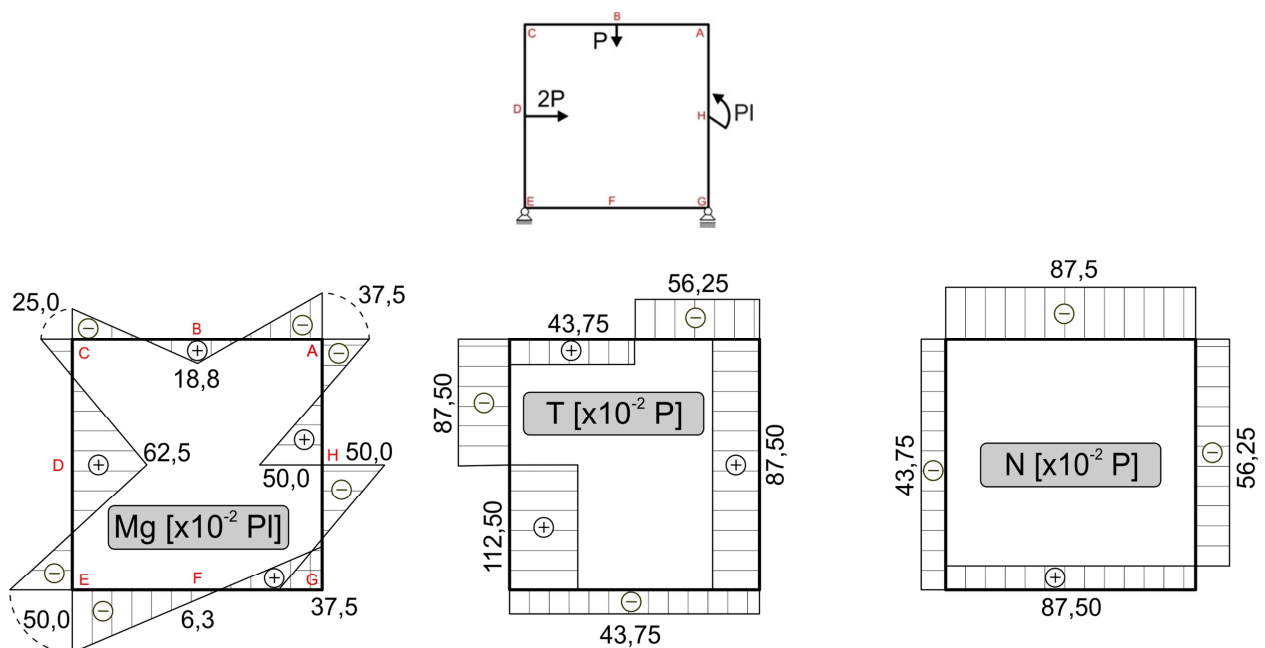
$$T^E = (-P) + 0 \cdot \frac{7}{8}Pl + \left(-\frac{1}{l}\right) \cdot \left(-\frac{9}{16}Pl\right) + 0 \cdot \frac{3}{8}Pl = -\frac{7}{16}P$$

Siła normalna przyjmuje w punkcie E dwie wartości (skok spowodowany jest przyłożoną w tym punkcie siłą – patrz rys.4)

$$N^E = (-P) + 0 \cdot \frac{7}{8}Pl + \left(-\frac{1}{l}\right) \cdot \left(-\frac{9}{16}Pl\right) + 0 \cdot \frac{3}{8}Pl = -\frac{7}{16}P$$

$$N^E = 0 + \frac{1}{l} \cdot \frac{7}{8}Pl + 0 \cdot \left(-\frac{9}{16}Pl\right) + 0 \cdot \frac{3}{8}Pl = \frac{7}{8}P$$

Przeprowadzenie powyższych obliczeń dla wszystkich punktów ramy prowadzi do wyznaczenia rzeczywistego rozkładu sił i momentów przekrojowych dla bazowej, zamkniętej ramy (rys.7).



Rys.7. Rzeczywisty rozkład sił oraz momentów przekrojowych

Tablica 1. Wartości momentu gnącego w poszczególnych punktach charakterystycznych ramy

Pkt	$Mg^{(0)}$	$mg^{(1)}$	$mg^{(2)}$	$mg^{(3)}$	<b><math>Mg</math></b>
A	0	0	0	-1	-0,375 Pl
B	0	0	-1	-1	0,1875 Pl
C	-Pl	0	-2	-1	-0,250 Pl
D	-Pl	1	-2	-1	0,625 Pl
E	-3 Pl	2	-2	-1	-0,500 Pl
F	-2 Pl	2	-1	-1	-0,063 Pl
G	- Pl	2	0	-1	0,375 Pl
H	- Pl	1	0	-1	-0,500 Pl
H	0	1	0	-1	0,500 Pl

Tablica 2. Wartości siły tnącej w poszczególnych punktach charakterystycznych ramy

Pkt	$T^{(0)}$	$t^{(1)}$	$t^{(2)}$	$t^{(3)}$	<b><math>T</math></b>
A	0	0	1/l	0	-0.5625 P
B	P	0	1/l	0	0.4375 P
C	P	0	1/l	0	0.4375 P
C	0	-1/l	0	0	-0.875 P
D	2 P	-1/l	0	0	1.125 P
E	2 P	-1/l	0	0	1.125 P
E	- P	0	-1/l	0	-0.4375 P
F	-P	0	-1/l	0	-0.4375 P
G	-P	0	-1/l	0	-0.4375 P
G	0	1/l	0	0	0.875 P
H	0	1/l	0	0	0.875 P
A	0	1/l	0	0	0.875 P

Tablica 3. Wartości siły normalnej w poszczególnych punktach charakterystycznych ramy

Pkt	$N^{(0)}$	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$	<b><math>N</math></b>
A	0	-1/l	0	0	-0.875 P
B	0	-1/l	0	0	-0.875 P
C	0	-1/l	0	0	-0.875 P
C	-P	0	-1/l	0	-0.4375 P
D	-P	0	-1/l	0	-0.4375 P
E	-P	0	-1/l	0	-0.4375 P
E	0	1/l	0	0	0.875 P
F	0	1/l	0	0	0.875 P
G	0	1/l	0	0	0.875 P
G	0	0	1/l	0	-0.5625 P
H	0	0	1/l	0	-0.5625 P
A	0	0	1	0	-0.5625 P

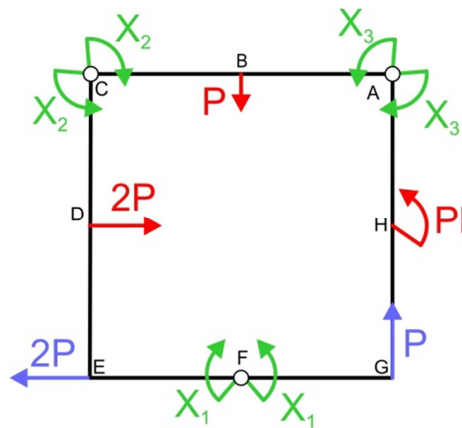


## 3.2. METODA „PRZEGUBÓW”

### Podział obciążenia na stany proste

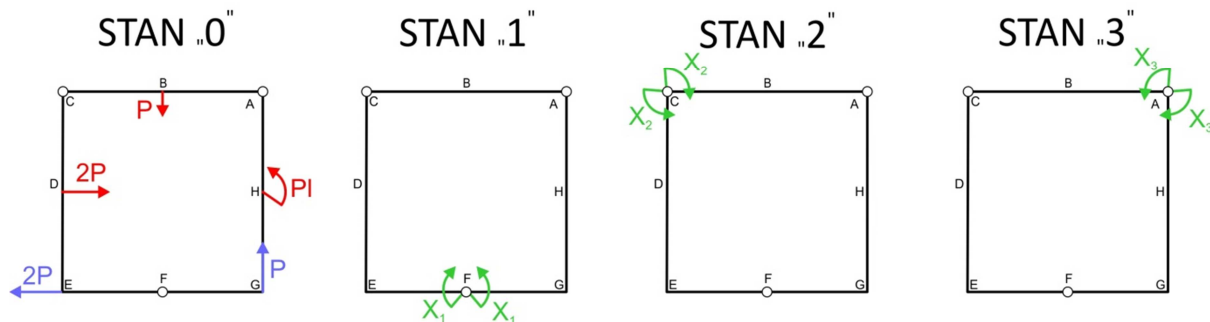
Metoda ta polega na wprowadzeniu w obwód zamkniętej ramy trzech myślowych przegubów, co doprowadza do wewnętrznej, statycznej wyznaczalności układu.

W miejscach wprowadzonych przegubów należy dołożyć jednostkowe momenty gnące  $X_1, X_2, X_3$ .



Rys.8. Niewiadome siły i momenty w miejscach wprowadzenia przegubów

Następnie koniecznym jest rozdzielenie złożonego stanu obciążenia na cztery proste, statycznie wyznaczalne stany 0, 1, 2 i 3 (rys.9).



Rys.9. Podział obciążenia na stany proste, statycznie wyznaczalne

Obliczenia rozpoczyna się od stanu zerowego. Wprowadzenie przegubów pozwala na rozbięcie obwodu ramy na trzy niezależne, statycznie wyznaczalne układy (rys.10), dzięki czemu możliwym staje się wyznaczenie nieznanych sił działających w przegubach.

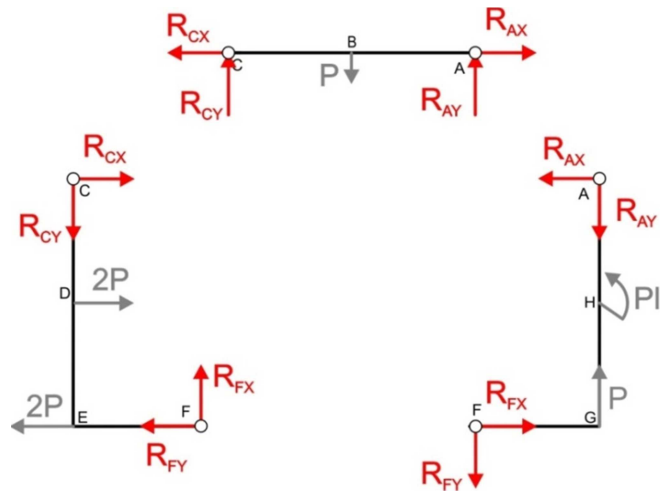
Kolejne strony opracowania zawierają rozwiązanie układu równań równowagi statycznej przeprowadzone przykładowo dla stanu „0” oraz „1”. Rysunki 11,13,14 i 15 obrazują rozkład momentów i sił przekrojowych w poszczególnych stanach obciążenia.

Rysunek 16 obrazuje rozkład momentów i sił przekrojowych na tle geometrii ramy dla wszystkich przyjętych stanów obciążenia.

**STAN „0”**

Równania równowagi statycznej:

- 1)  $\Sigma P_x = 0 \Leftrightarrow 2P - 2P + R_{CX} - R_{FX} = 0$
- 2)  $\Sigma P_F = 0 \Leftrightarrow R_{CY} - R_{FY} = 0$
- 3)  $\Sigma M(F) = 0 \Leftrightarrow -2Pl - R_{CX}2l + R_{CY}l = 0$
  
- 4)  $\Sigma P_x = 0 \Leftrightarrow -R_{CX} + R_{AX} = 0$
- 5)  $\Sigma P_F = 0 \Leftrightarrow -R_{CY} + P - R_{AY} = 0$
- 6)  $\Sigma M(F) = 0 \Leftrightarrow -R_{CY}2l + Pl = 0$
  
- 7)  $\Sigma P_x = 0 \Leftrightarrow R_{FX} - R_{AX} = 0$
- 8)  $\Sigma P_F = 0 \Leftrightarrow R_{FY} - P + R_{AY} = 0$
- 9)  $\Sigma M(F) = 0 \Leftrightarrow -R_{AY}l + R_{AX}2l + Pl + Pl = 0$

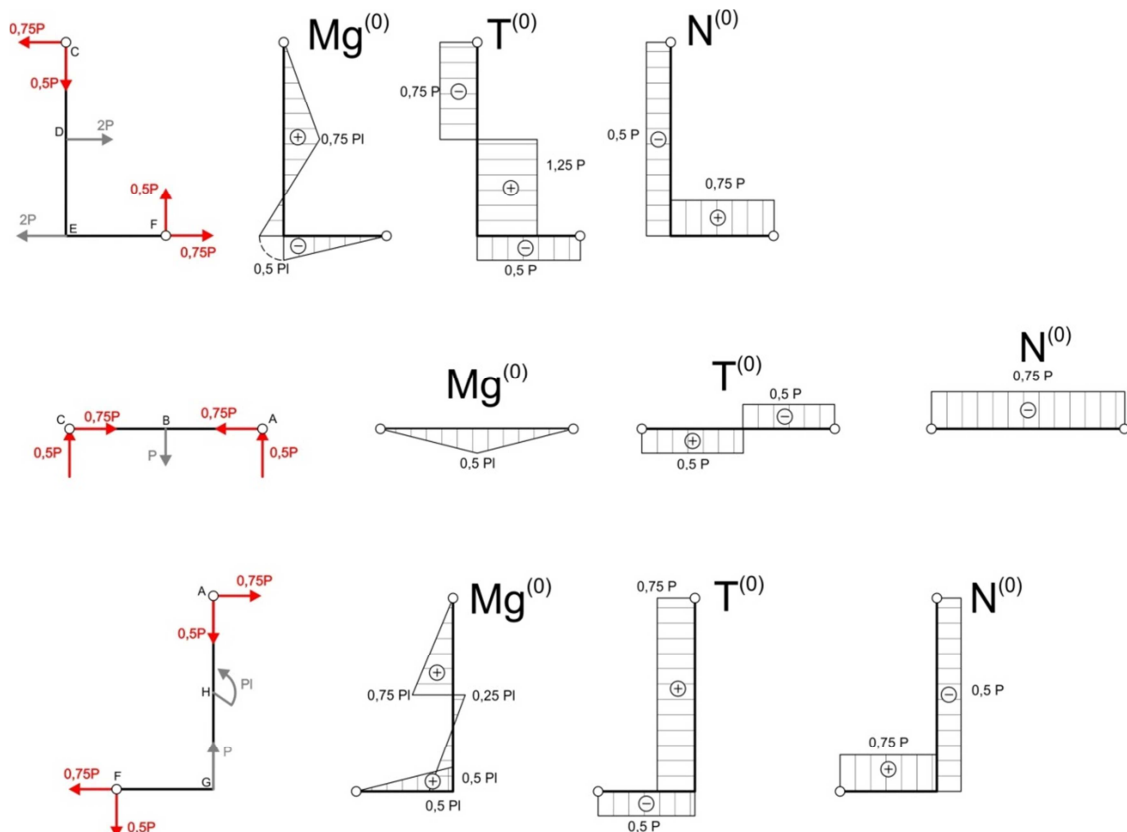


Rys.10. Rozbicie obwodu ramy na trzy niezależne układy – stan „0”

Rozwiązanie układu:

- (2)  $R_{FY} = R_{CY} = \frac{1}{2}P$
- (5)  $R_{AY} = P - R_{CY} = P - \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}P$
- (3)  $R_{CX} = \frac{1}{2l}(R_{CY}l - 2Pl) = -\frac{3}{4}P$
- (1)  $R_{FX} = R_{CX} = -\frac{3}{4}P$
- (4)  $R_{AX} = R_{CX} = -\frac{3}{4}P$

Równania (7) do (9) można potraktować, jako sprawdzenie obliczeń.

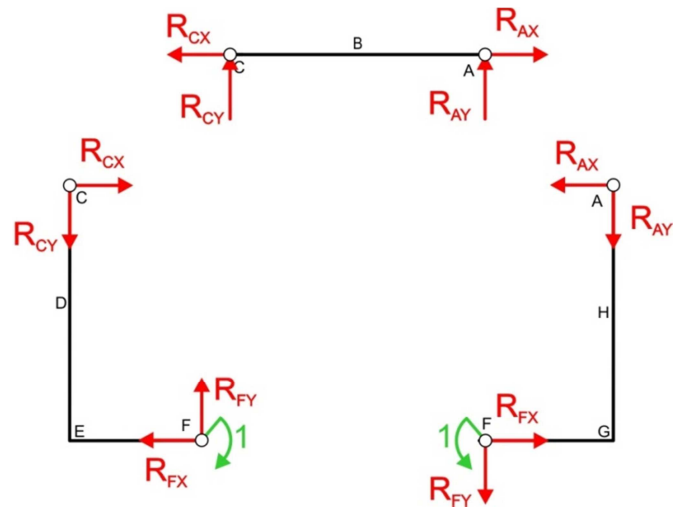


Rys.11. Wykresy sił i momentów przekrojowych w stanie „1”

**Stan „1”**

Równania równowagi statycznej:

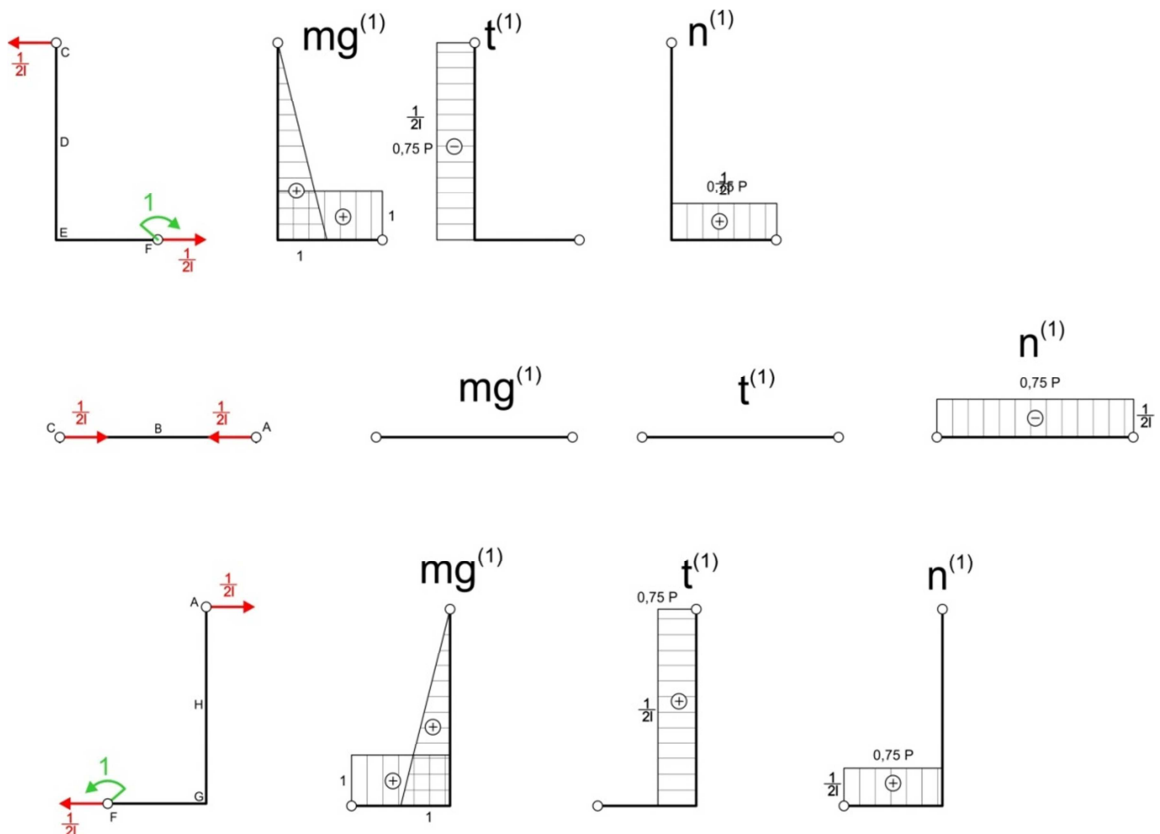
- 1)  $\Sigma P_x = 0 \iff R_{CX} - R_{FX} = 0$
- 2)  $\Sigma P_F = 0 \iff R_{CY} - R_{FY} = 0$
- 3)  $\Sigma M(C) = 0 \iff -R_{FX}2l + R_{FY}l - 1 = 0$
  
- 4)  $\Sigma P_x = 0 \iff -R_{CX} + R_{AX} = 0$
- 5)  $\Sigma P_F = 0 \iff -R_{CY} - R_{AY} = 0$
- 6)  $\Sigma M(F) = 0 \iff -R_{CY}2l = 0$
  
- 7)  $\Sigma P_x = 0 \iff R_{FX} - R_{AX} = 0$
- 8)  $\Sigma P_F = 0 \iff R_{FY} + R_{AY} = 0$
- 9)  $\Sigma M(F) = 0 \iff -R_{AY}l + R_{AX}2l + 1 = 0$



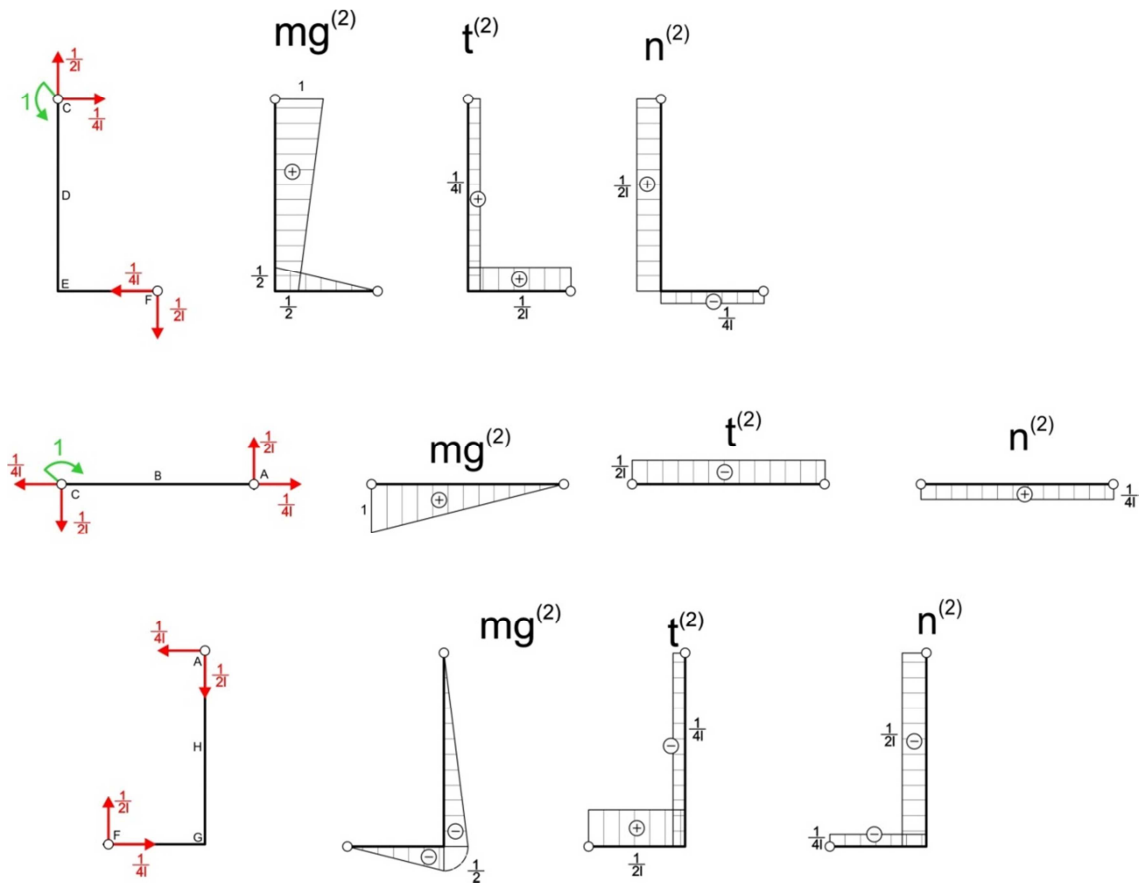
Rys.12. Rozbicie obwodu ramy na trzy niezależne układy – stan „1”

Rozwiązanie układu:

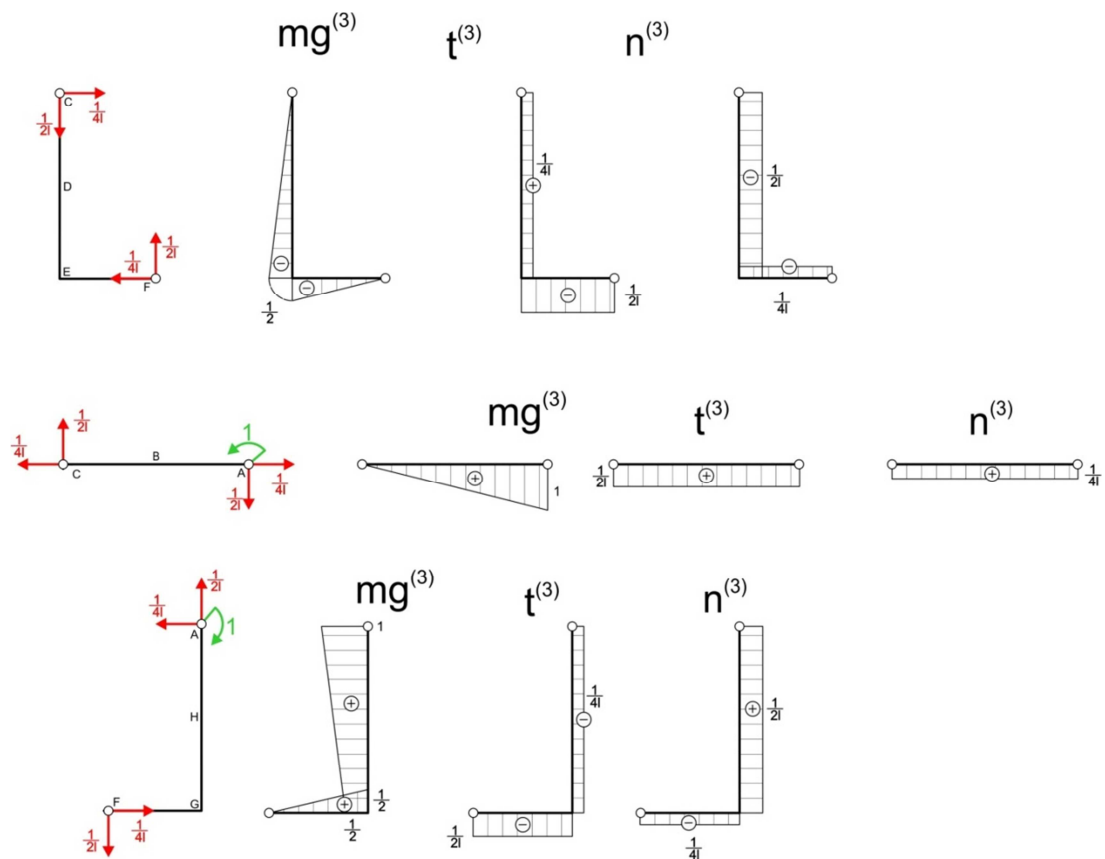
- (6)  $R_{CY} = 0$
- (5)  $R_{AY} = R_{CY} = 0$
- (2)  $R_{FY} = R_{CY} = 0$
- (1)  $R_{CX} = R_{FX} = -\frac{1}{2l}$
- (4)  $R_{AX} = R_{FX} = -\frac{1}{2l}$



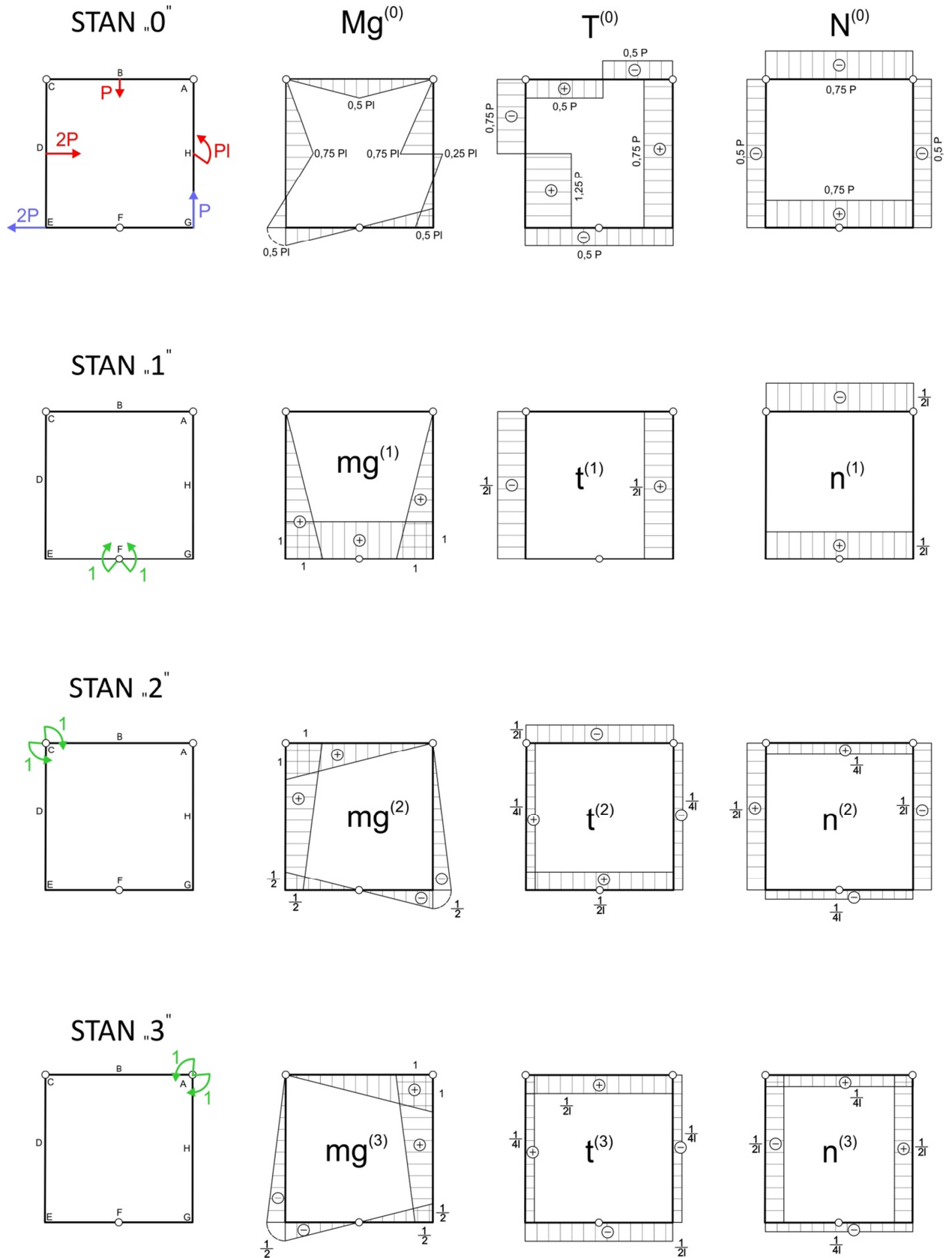
Rys.13. Wykresy sił i momentów przekrojowych w stanie „1”



Rys.14. Wykresy sił i momentów przekrojowych w stanie „2”



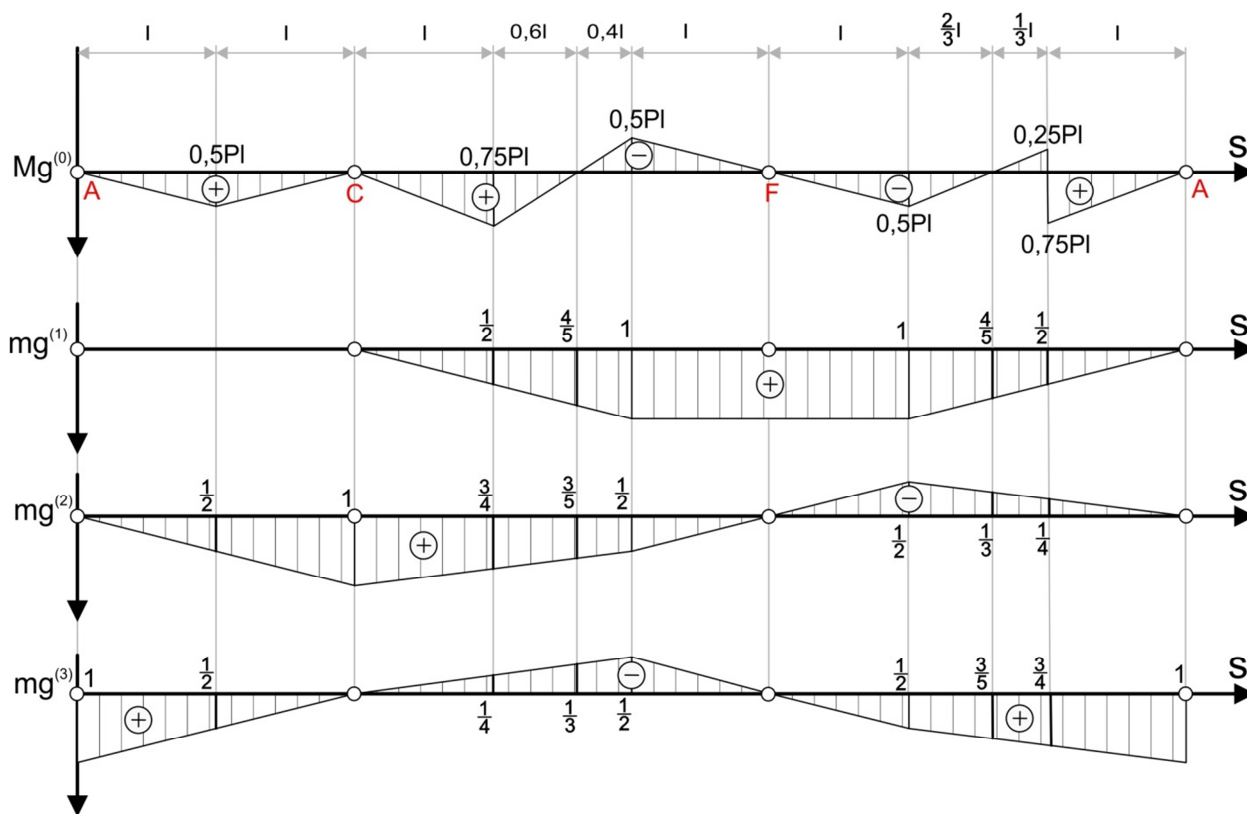
Rys.15. Wykresy sił i momentów przekrojowych w stanie „3”



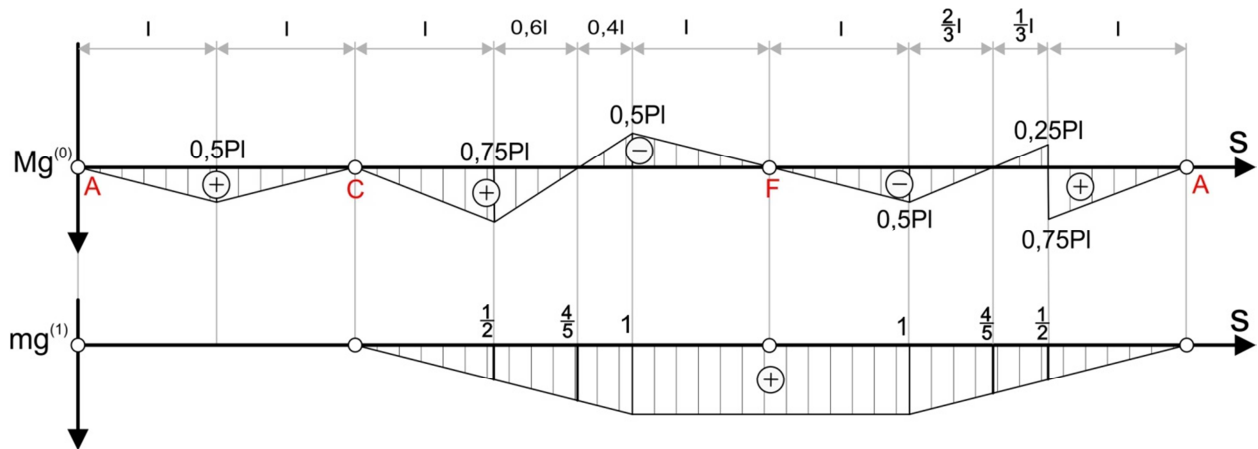
Rys. 16. Wykresy sił i momentów przekrojowych

### Wyznaczanie współczynników we wzorach Maxwell'a - Mohr'a

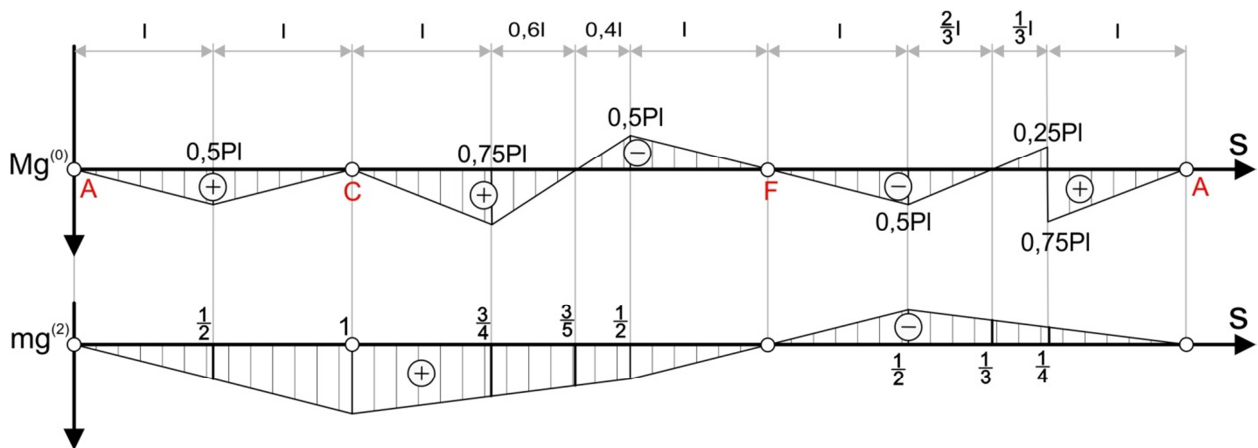
Wyznaczanie współczynników we wzorach (1.1) przeprowadza się analogicznie do sposobu stosowanego w przypadku metody przecięć (patrz str.10).



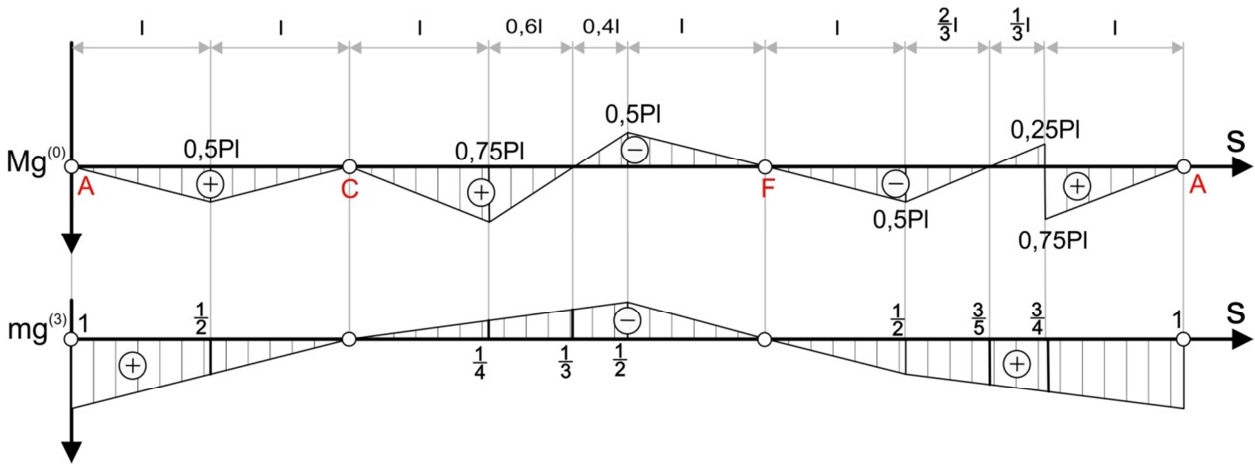
Rys.17. Wykresy momentów gnących w stanach 0,1,2 i 3



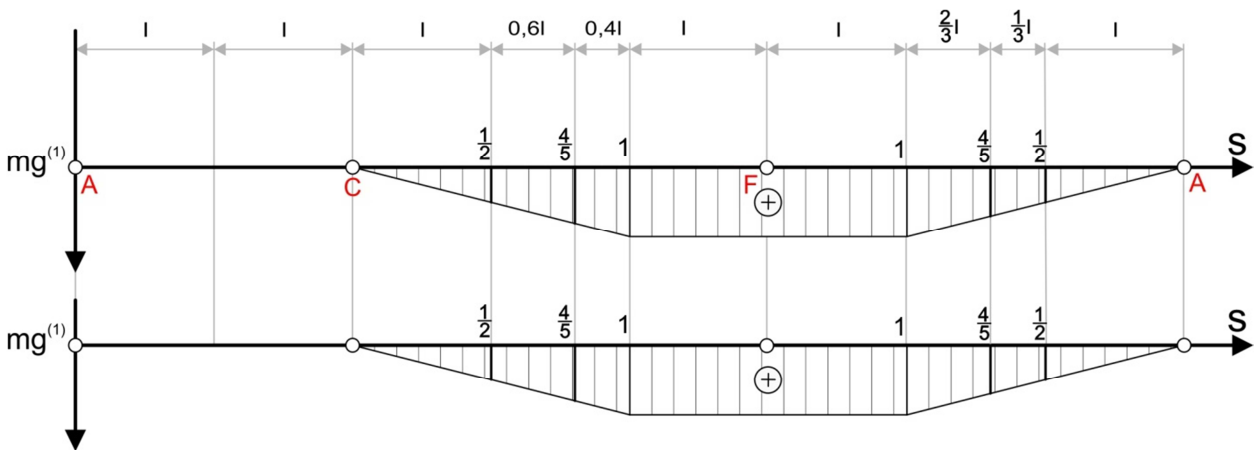
$$\alpha_{10} = \frac{1}{EI} \left\{ 0 + 0 + \left[ \frac{1}{3} \cdot 0,75 Pl \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,75 Pl \left( 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \right) \cdot 0,6l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot (-0,5 Pl) \left( \frac{4}{5} + 2 \cdot 1 \right) \cdot 0,4l \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot (-0,5 Pl) \cdot 1 \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot 0,5 Pl \cdot 1 \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,5 Pl \left( 2 \cdot 1 + \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot (-0,25 Pl) \left( \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 0,75 Pl \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] \right\} = 0,422 \frac{Pl^2}{EI}$$



$$\alpha_{20} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{3} \cdot 0,5 Pl \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,5 Pl \left( 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,75 Pl \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,75 Pl \cdot \left( 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \right) \cdot 0,6l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot (-0,5 Pl) \left( \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 0,4l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot (-0,5 Pl) \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 0,5 Pl \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,5 Pl \left( 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + \left( -\frac{1}{3} \right) \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot (-0,25 Pl) \left( \left( -\frac{1}{3} \right) + 2 \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) \right) \cdot \frac{1}{3} l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 0,75 Pl \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) \cdot l \right] \right\} = 0,365 \frac{Pl^2}{EI}$$

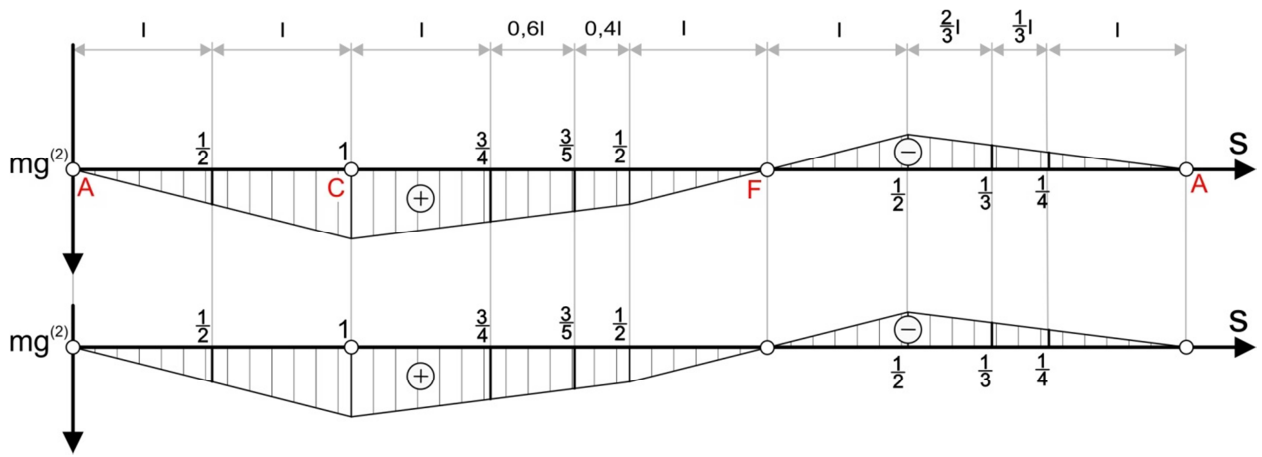


$$\alpha_{30} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,5 Pl \cdot 1 \cdot (2l + l) \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 0,75 Pl \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,75 Pl \cdot \left( 2 \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \right) \cdot 0,6l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot (-0,5 Pl) \left(-\frac{1}{4} + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot 0,4l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot (-0,5 Pl) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 0,5 Pl \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,5 Pl \cdot \left( 2 \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot (-0,25 Pl) \left( \frac{3}{5} + 2 \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{3} l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 0,75 Pl \cdot \left( 2 \frac{3}{4} + 1 \right) \cdot l \right] \right\} = 0,708 \frac{Pl^2}{EI}$$

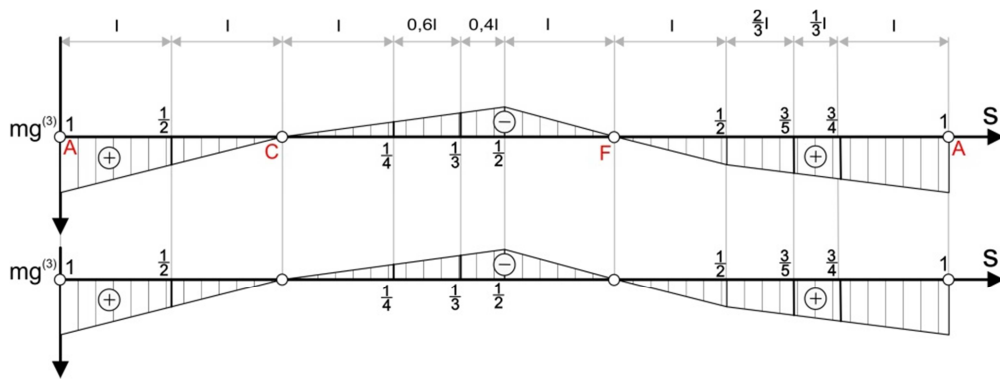


$$\alpha_{11} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2l \right] + \left[ 1 \cdot 1 \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2l \right] \right\} = \frac{10}{3} \frac{l}{EI}$$

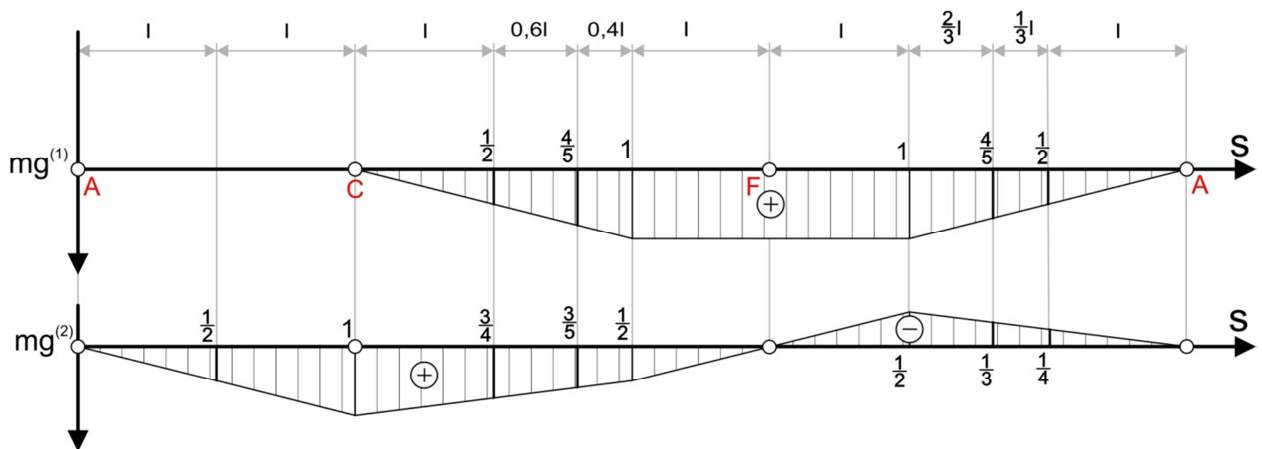




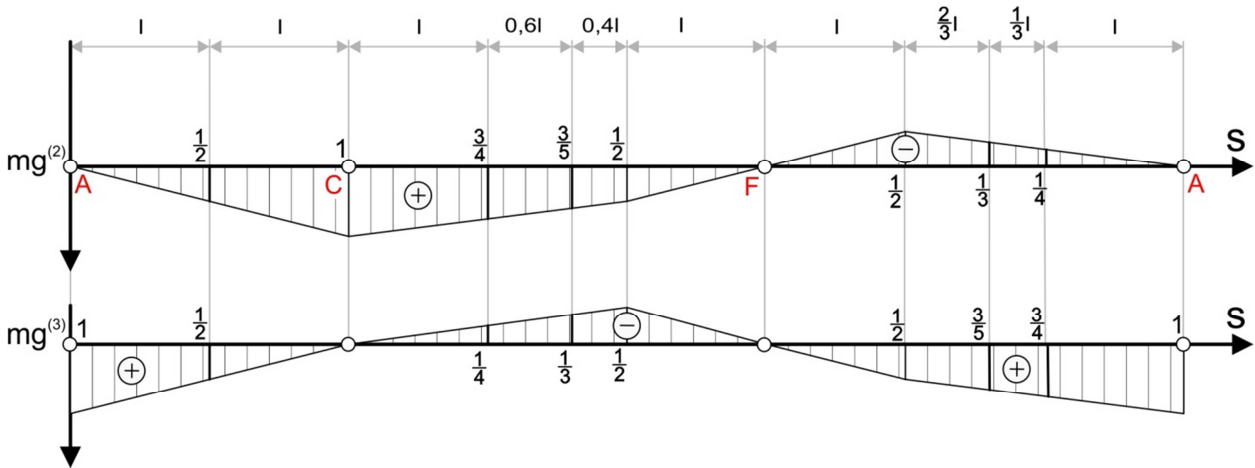
$$\alpha_{22} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot 2l \cdot \left[ 1 \left( 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \right] \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot l \right] \right\} = \frac{13 l}{6 EI}$$



$$\alpha_{33} = \alpha_{22}$$



$$\alpha_{12} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot 2l \right] \right\} = \frac{1 l}{3 EI}$$



$$\alpha_{23} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{6} \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] + \left[ \frac{1}{6} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \right) \cdot 2l \right] \right\} = -\frac{1}{2} \frac{l}{EI}$$

Pozostałe wartości współczynników przyjmuje się jako:

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} \qquad \alpha_{31} = \alpha_{13} \qquad \alpha_{32} = \alpha_{23}$$

Po uwzględnieniu otrzymanych wyników układ równań Maxwella-Mohra (1.1b) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{3} \frac{l}{EI} & \frac{1}{3} \frac{l}{EI} & \frac{1}{3} \frac{l}{EI} \\ \frac{1}{3} \frac{l}{EI} & \frac{13}{6} \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \frac{l}{EI} \\ \frac{1}{3} \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \frac{l}{EI} & \frac{13}{6} \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,422 \frac{Pl^2}{EI} \\ 0,375 \frac{Pl^2}{EI} \\ 0,708 \frac{Pl^2}{EI} \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia nieznanymi wielkościami  $X_1, X_2$  oraz  $X_3$  należy przekształcić równanie do postaci:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \frac{l}{EI} & \frac{1}{3} \frac{l}{EI} & \frac{1}{3} \frac{l}{EI} \\ \frac{1}{3} \frac{l}{EI} & \frac{13}{6} \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \frac{l}{EI} \\ \frac{1}{3} \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \frac{l}{EI} & \frac{13}{6} \frac{l}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} 0,422 \frac{Pl^2}{EI} \\ 0,375 \frac{Pl^2}{EI} \\ 0,708 \frac{Pl^2}{EI} \end{bmatrix} \right)$$

Rozwiązaniu układu równań prowadzi do wartości:

$$\begin{cases} X_1 = -0,064Pl \\ X_2 = -0,250Pl \\ X_3 = -0,375Pl \end{cases}$$

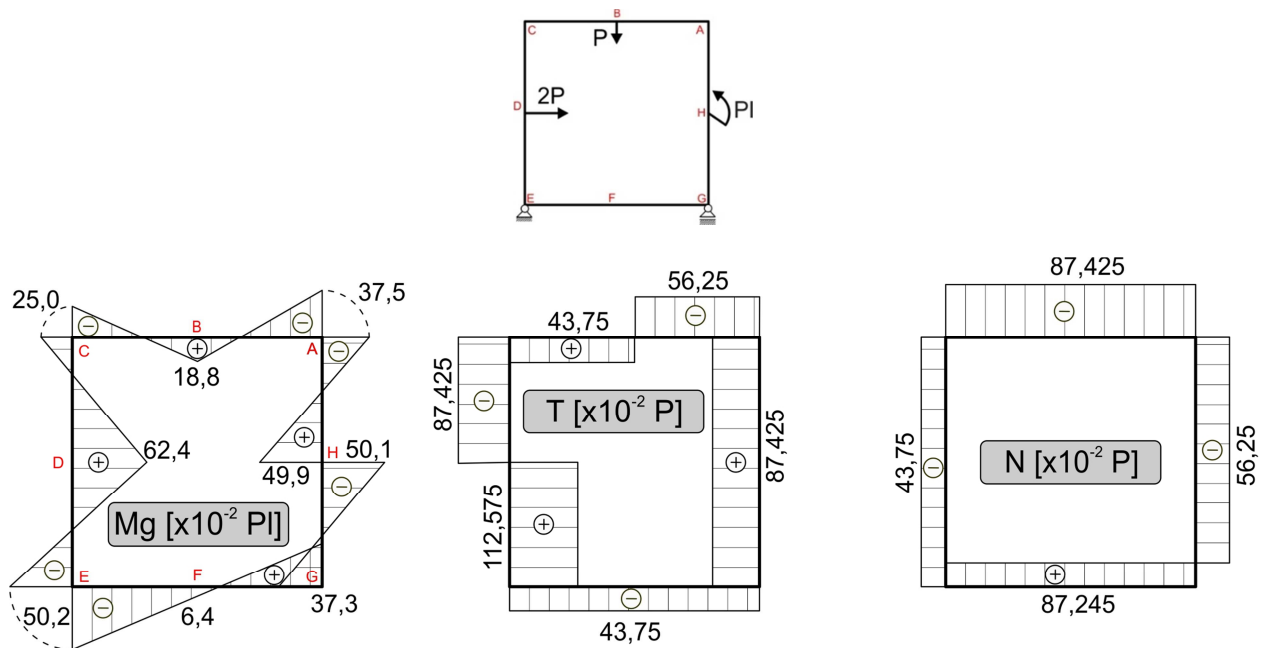
Siły i momenty przekrojowe w poszczególnych punktach konstrukcji obliczamy z zależności:

$$Mg = Mg^{(0)} + mg^{(1)}X_1 + mg^{(2)}X_2 + mg^{(3)}X_3$$

$$T = T^{(0)} + t^{(1)}X_1 + t^{(2)}X_2 + t^{(3)}X_3$$

$$N = n^{(0)} + n^{(1)}X_1 + n^{(2)}X_2 + n^{(3)}X_3$$

Przeprowadzenie powyższych obliczeń dla wszystkich punktów ramy prowadzi do wyznaczenia rzeczywistego rozkładu sił i momentów przekrojowych dla bazowej, zamkniętej ramy (rys.7).



Rys.18. Rzeczywisty rozkład sił oraz momentów przekrojowych

Tablica 4. Wartości momentu gnącego w poszczególnych punktach charakterystycznych ramy

Pkt	$Mg^{(0)}$	$mg^{(1)}$	$mg^{(2)}$	$mg^{(3)}$	<b><math>Mg</math></b>
A	0	0	0	1	-0,375 Pl
B	0,5 Pl	0	0,5	0,5	0,188 Pl
C	0	0	1	0	-0,250 Pl
D	0,75 Pl	0,5	0,75	-0,25	0,624 Pl
E	-0,5 Pl	1	0,5	-0,5	-0,502 Pl
F	0	1	0	0	-0,064 Pl
G	0,5 Pl	1	-0,5	0,5	0,373 Pl
H	-0,25 Pl	-0,5	-0,25	0,75	-0,501 Pl
H	0,75 Pl	-0,5	-0,25	0,75	-0,499 Pl

Tablica 5. Wartości siły tnącej w poszczególnych punktach charakterystycznych ramy

Pkt	$T^{(0)}$	$t^{(1)}$	$t^{(2)}$	$t^{(3)}$	<b><math>T</math></b>
A	-0,5 P	0	-0,5	0,5	-0,5625 P
B	-0,5 P	0	-0,5	0,5	-0,5625 P
B	0,5 P	0	-0,5	0,5	0,4375 P
C	0,5 P	0	-0,5	0,5	0,4375 P
C	-0,75 P	-0,5	0,25	0,25	-0,87425 P
D	-0,75 P	-0,5	0,25	0,25	-0,87425 P
D	1,25 P	-0,5	0,25	0,25	1,12575 P
E	1,25 P	-0,5	0,25	0,25	1,12575 P
E	-0,5 P	0	0,5	-0,5	-0,4375 P
F	-0,5 P	0	0,5	-0,5	-0,4375 P
G	-0,5 P	0	0,5	-0,5	-0,4375 P
G	0,75 P	0,5	-0,25	-0,25	0,87425 P
H	0,75 P	0,5	-0,25	-0,25	0,87425 P
A	0,75 P	0,5	-0,25	-0,25	0,87425 P

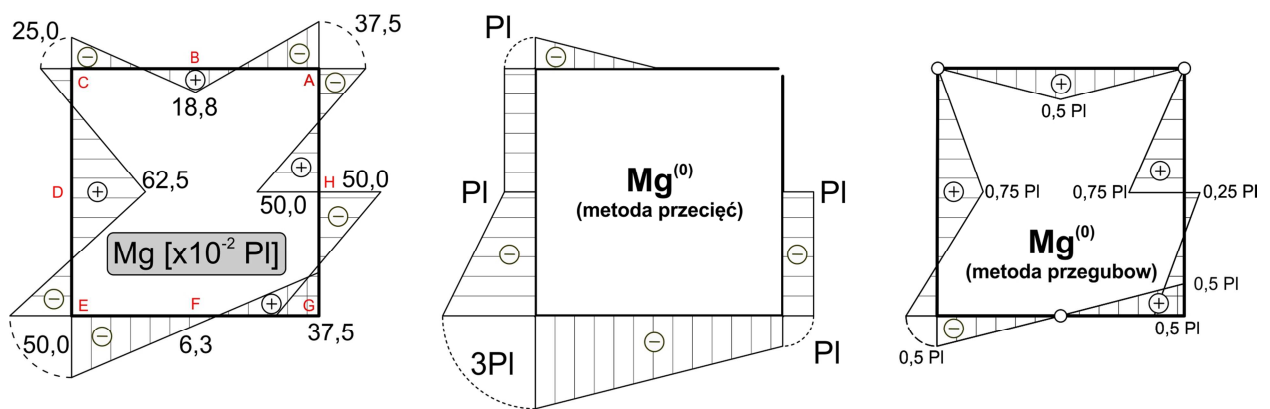
Tablica 6. Wartości siły normalnej w poszczególnych punktach charakterystycznych ramy

Pkt	$N^{(0)}$	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$	<b><math>N</math></b>
A	-0,75 P	-0,5	0,25	0,25	-0,87425 P
B	-0,75 P	-0,5	0,25	0,25	-0,87425 P
C	-0,75 P	-0,5	0,25	0,25	-0,87425 P
C	-0,5 P	0	0,5	-0,5	-0,4375 P
D	-0,5 P	0	0,5	-0,5	-0,4375 P
E	-0,5 P	0	0,5	-0,5	-0,4375 P
E	0,75 P	0,5	-0,25	-0,25	0,87425 P
F	0,75 P	0,5	-0,25	-0,25	0,87425 P
G	0,75 P	0,5	-0,25	-0,25	0,87425 P
G	-0,5 P	0	-0,5	0,5	-0,5625 P
H	-0,5 P	0	-0,5	0,5	-0,5625 P
A	-0,5 P	0	-0,5	0,5	-0,5625 P

## 4. PORÓWNANIE WYNIKÓW

Przedstawione obliczenia dowodzą, iż obydwie metody prowadzą do niemal identycznych rezultatów (rys.7 i 18). Zaistniałe różnice, pomijalnie małe, wynikają z przyjętych w trakcie obliczeń zaokrążeń liczb ułamkowych.

Warto zwrócić uwagę na porównanie przebiegu momentów gnących w stanach „zerowych”, otrzymanych w wyniku obliczeń z wykorzystaniem poszczególnych metod, z rezultatem końcowym przedstawiającym rzeczywisty rozkład omawianego parametru wzdłuż długości obwodu ramy (rys.19). Wynik uzyskany przy wykorzystaniu metody przegubów prowadzi do rozkładu jakościowo zbliżonego do rzeczywistego przebiegu.



Rys.19. Porównanie rzeczywistego przebiegu momentu gnącego z rezultatami w stanach „zerowych”

## **LITERATURA**

1. Bruhn E.F.: *Analysis and design of flight vehicle structures*, 1973
2. Brzoska Z.: *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, PWN 1965
3. Brzoska Z.: *Wytrzymałość Materiałów*, PWN
4. Bruhn E.F.: *Analysis and design of flight vehicle structures*, 1973
5. Megson T.H.G.: *Aircraft structures for engineering students*, BH, 1999