Politechnika Rzeszowska
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa

Katedra Inżynierii Lotniczej i Kosmicznej

Pomoce dydaktyczne

z przedmiotu:

Metoda Elementów Skończonych

Wykorzystanie MES do analizy kratownic płaskich

Wersja robocza dokumentu

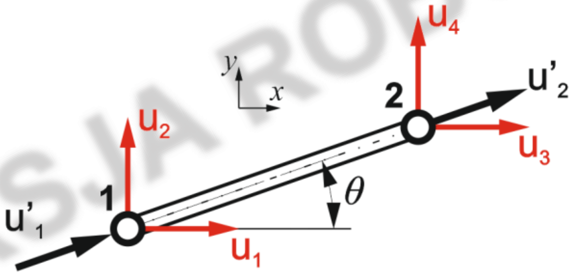
Ewentualne uwagi, sugestie lub wykryte błędy w tekście proszę kierować na adres: lukasz.swiech@prz.edu.pl

Łukasz Święch

Rzeszów, 2023

Definicja dwuwęzłowego elementu kratownicy

Przyjmuje się, że pręty tworzące kratownicę doznawać mogą jedynie deformacji osiowych, w postaci wydłużenia lub skrócenia swojej długości. Mając na uwadze takie ograniczeni, do analizy kratownic płaskich, wykorzystać można prętowy element skończony zdefiniowany w poprzednim temacie. Różnica w stosunku do prostego zagadnienia pręta wynika z faktu, iż element lokalnie może doznawać tylko deformacji osiowych, ale w układzie konstrukcji jego węzły mogą dowolnie przemieszczać się po płaszczyźnie rozwiązania.



Rys. 1.

Zakładamy, że w lokalnym układzie odniesienia element posiada dwa stopnie swobody umożliwiające osiową deformację elementu:

$$\boldsymbol{u}'^T = [u'_1 \; u'_2]$$

W układzie globalnym (związanym z całą konstrukcją) ten sam element definiowany jest przez cztery stopnie swobody, odpowiadające przemieszczeniom węzłów na płaszczyźnie rozwiązania:

$$\boldsymbol{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]$$

Relacja pomiędzy globalnymi, a lokalnymi przemieszczeniami wyrazić można jako:

$$u'_1 = u_1 cos(\theta) + u_2 sin(\theta)$$

$$u'_2 = u_3 cos(\theta) + u_4 sin(\theta)$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy lokalnym, a globalnym układem współrzędnych.

Relacja powyższa w formie macierzowej przedstawia się jako:

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u}$$

gdzie macierz transformacyjna $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

gdzie z kolei, cosinusy i sinusy kierunkowe oraz długość elementu zdefiniowano :

$$c = \frac{x_2 - x_1}{l}, \qquad s = \frac{y_2 - y_1}{l}, \qquad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Macierz sztywności elementu w układzie lokalnym, odpowiadająca dwóm stopniom swobody (osiowym przemieszczeniom węzłów):

$$\boldsymbol{k}' = \frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Energia sprężysta elementu w układzie lokalnym:

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}'^T\boldsymbol{k}'\,\boldsymbol{u}'$$

stosując podstawienie $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}$ otrzymamy:

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T[\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{L}]\,\boldsymbol{u}$$

co pozwala na wyrażenie macierzy sztywności elementu w układzie globalnym jako:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{L}$$

macierz sztywności:

$$\boldsymbol{k} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

W układzie lokalnym naprężenie w elemencie wyrażone jest jako:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}$$

zatem:

$$\sigma = E\,\frac{u_2' - u_1'}{l}$$

czyli:

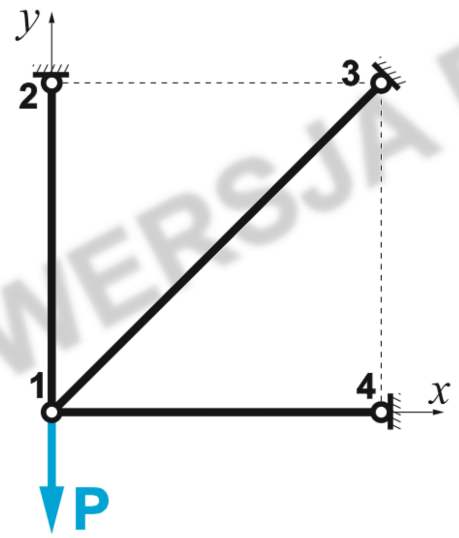
$$\sigma = \frac{E}{l}[-1 \quad 1]\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{E}{l}[-1 \quad 1]\,\boldsymbol{u}'$$

poprzez transformację układu lokalnego do globalnego otrzymać można naprężenie jako funkcję przemieszczeń w układzie globalnym:

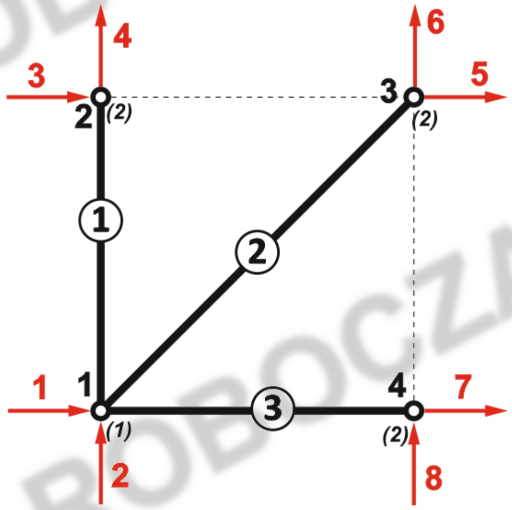
$$\sigma = \frac{E}{l}[-1 \quad 1]\,\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \qquad \text{lub} \qquad \sigma = \frac{E}{l}[-c \quad -s \quad c \quad s]\,\boldsymbol{u}$$

Przykład rozwiązania

Kratownica zbudowana na planie kwadratu o boku $a = 1\ m$, składająca się z trzech prętów obciążona została siłą $P = 1\ kN$. Wyznaczyć przemieszczenia węzłów kratownicy oraz deformacje i naprężenia w prętach, jeżeli każdy z prętów ma pole przekroju poprzecznego $A = 10\ mm^2$ i zbudowany jest z materiału o module Younga $E = 70\ GPa$.



Rys. 2. Geometria, obciążenie i warunki brzegowe kratownicy



Rys. 3. Podział konstrukcji na elementy skończone

Procedura rozwiązania zagadnienia z zastosowaniem MES jest analogiczna do przedstawionych w poprzednich dokumentach.

Konstrukcję dzielimy na trzy dwuwęzłowe elementy typu prętowego (rys. 3). W każdym z czterech węzłów układu znajduje się po dwa, globalne stopie swobody, tj. możliwość przemieszczania wzdłuż osi x i y. Stopnie swobody oznaczone liczbami parzystymi odnoszą się do przemieszczeń wzdłuż osi poziomej x, nieparzystymi zaś do osi pionowej y.

Warunki brzegowe uniemożliwiają przemieszczanie się punktów odpowiadających węzłom 2, 3 i 4. Co z kolei odpowiada stopniom swobody 3 - 8. Oznacza to jednocześnie, że jedyne przemieszczenia różne od zera wystąpią w węźle nr 1, któremu odpowiadają globalne stopnie swobody 1 i 2.

Każdemu z trzech elementów przyporządkować należy odpowiednią długość l, oraz sztywność na rozciąganie i ściskanie wyrażoną jako iloczyn EA.

Przemieszczenia lokalne i globalne

Przemieszczenia globalne węzłów poszczególnych elementów $\left(u_i{}^{(e)},\ \ i = 1, 2, 3, 4\right)$ odpowiadają przemieszczeniom globalnym konstrukcji $(u_i,\ \ i = 1, 2, \dots, 8)$:

$u_1{}^{(1)} = u_1{}^{(2)} = u_1{}^{(3)} = u_1$ $u_2{}^{(1)} = u_2{}^{(2)} = u_2{}^{(3)} = u_2$	Przemieszczenia węzłów początkowych elementów są tożsame z przemieszczeniem globalnego węzła 1
$u_3{}^{(1)} = u_3$ $u_3{}^{(2)} = u_5$ $u_3{}^{(3)} = u_7$	Odpowiedniość przemieszczeń poziomych węzłów końcowych elementów z globalnymi węzłami konstrukcji
$u_4{}^{(1)} = u_4$ $u_4{}^{(2)} = u_6$ $u_4{}^{(3)} = u_8$	Odpowiedniość przemieszczeń pionowych węzłów końcowych elementów z globalnymi węzłami konstrukcji

Globalne siły węzłowe:

W węźle globalnym numer jeden przyłożono zewnętrzną siła skupiona $P = 1\ kN$ na kierunku pionowym, przeciwnie do zwrotu osi y. W węzłach 2, 3 i 4 istnieć muszą siły odpowiadające reakcją podpór prętów kratownicy.

Macierz sztywności elementu w układzie globalnym:

W układzie globalnym macierz sztywności każdego z elementów przedstawia się jako:

$$\boldsymbol{k}^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

gdzie, $c \equiv c^{(e)}$ i $s \equiv s^{(e)}$ oznaczają odpowiednio cosinusy i sinusy kierunkowe dla konkretnego elementu (dla zachowania przejrzystości zapisu pominięto indeksy górne).

Macierz dla całej konstrukcji (zbioru wszystkich elementów) przyjmuje wymiar liczby stopni swobody w całym układzie (tj. wymiar **8 x 8**).

<u>Macierz sztywności elementu 1:</u>

Współrzędne węzła 1 elementu to $x_1 = 0\ mm$ i $y_1 = 0\ mm$.

Współrzędne węzła 2 elementu to $x_2 = 0\ mm$ i $y_2 = 1000\ mm$.

Długość elementu:

$$l^{(1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \Rightarrow \quad l^{(1)} = 1000\ mm$$

$$c = \frac{x_2 - x_1}{l^{(1)}} \quad \Rightarrow \quad c = 0, \qquad (\text{tożsame z wartością } cos 90^\circ)$$

$$s = \frac{y_2 - y_1}{l^{(1)}} \quad \Rightarrow \quad s = 1, \qquad (\text{tożsame z wartością } sin 90^\circ)$$

Macierz sztywności elementu 1 przedstawia się jako:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \frac{EA}{l^{(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Węzeł 1 elementu pierwszego odpowiada węzłowi konstrukcji nr 1. Stopnie swobody 1 i 2 elementu (związane z węzłem 1) odpowiadają zatem stopniom swobody 1 i 2 konstrukcji.

Węzeł 2 elementu pierwszego odpowiada węzłowi konstrukcji nr 2. Stopnie swobody 3 i 4 elementu (związane z węzłem 2) odpowiadają zatem stopniom swobody 3 i 4 konstrukcji.

Zgodnie z zasadami podanymi w poprzednich rozdziałach, macierz sztywności elementu pierwszego w układzie całej konstrukcji przyjmie postać:

$$\boldsymbol{K}^{(1)} = \frac{EA}{l^{(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Macierz sztywności elementu 2:</u>

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \frac{EA}{l^{(2)}} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Węzeł 1 elementu drugiego odpowiada węzłowi konstrukcji nr 1. Stopnie swobody 1 i 2 elementu (związane z węzłem 1) odpowiadają zatem stopniom swobody 1 i 2 konstrukcji.

Węzeł 2 elementu drugiego odpowiada węzłowi konstrukcji nr 3. Stopnie swobody 3 i 4 elementu (związane z węzłem 2) odpowiadają zatem stopniom swobody 5 i 6 konstrukcji.

Zgodnie z zasadami podanymi w poprzednich rozdziałach, macierz sztywności elementu pierwszego w układzie całej konstrukcji przyjmie postać:

$$\boldsymbol{K}^{(2)} = \frac{EA}{l^{(2)}} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Identyczną postać uzyskać można z zastosowaniem macierz alokacji:

numeracja w konstrukcji

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

numeracja w elemencie

Macierz sztywności oblicza się wtedy jako:

$$\boldsymbol{K}^{(2)} = \boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{k}^{(2)} \boldsymbol{a_2}$$

<u>Macierz sztywności elementu 3:</u>

$$\boldsymbol{k}^{(3)} = \frac{EA}{l^{(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^{(3)} = \frac{EA}{l^{(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Globalna macierz sztywności całego układu – powstaje poprzez dodanie do siebie macierzy sztywności poszczególnych elementów w układzie globalnym

$$\boldsymbol{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \boldsymbol{K}^{(e)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{(1)} + \boldsymbol{K}^{(2)} + \boldsymbol{K}^{(3)}$$

co prowadzi do *(EA wyciągnięto przed nawias bo jest stałe dla całej konstrukcji – w innych przypadkach pamiętać o przemnożeniu również przez tą wartość)*:

$$K = EA\begin{bmatrix} 0{,}00135 & 0{,}00035 & 0 & 0 & -0{,}00035 & -0{,}00035 & -0{,}001 & 0 \\ 0{,}00035 & 0{,}00135 & 0 & -0{,}001 & -0{,}00035 & -0{,}00035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}001 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}00035 & -0{,}00035 & 0 & 0 & 0{,}00035 & 0{,}00035 & 0 & 0 \\ -0{,}0035 & -0{,}00035 & 0 & 0 & 0{,}00035 & 0{,}00035 & 0 & 0 \\ -0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie układu (konstrukcji):

$$\boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{f}$$

$$EA\begin{bmatrix} 0{,}00135 & 0{,}00035 & 0 & 0 & -0{,}00035 & -0{,}00035 & -0{,}001 & 0 \\ 0{,}00035 & 0{,}00135 & 0 & -0{,}001 & -0{,}00035 & -0{,}00035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}001 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}00035 & -0{,}00035 & 0 & 0 & 0{,}00035 & 0{,}00035 & 0 & 0 \\ -0{,}0035 & -0{,}00035 & 0 & 0 & 0{,}00035 & 0{,}00035 & 0 & 0 \\ -0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe zadania wymagają, aby przemieszczenia węzłów 2 i 3 były równe zeru, co odpowiada stopniom swobody 3 do 8, stąd:

$$EA\begin{bmatrix} 0{,}00135 & 0{,}00035 & 0 & 0 & -0{,}00035 & -0{,}00035 & -0{,}001 & 0 \\ 0{,}00035 & 0{,}00135 & 0 & -0{,}001 & -0{,}00035 & -0{,}00035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}001 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}00035 & -0{,}00035 & 0 & 0 & 0{,}00035 & 0{,}00035 & 0 & 0 \\ -0{,}0035 & -0{,}00035 & 0 & 0 & 0{,}00035 & 0{,}00035 & 0 & 0 \\ -0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix}$$

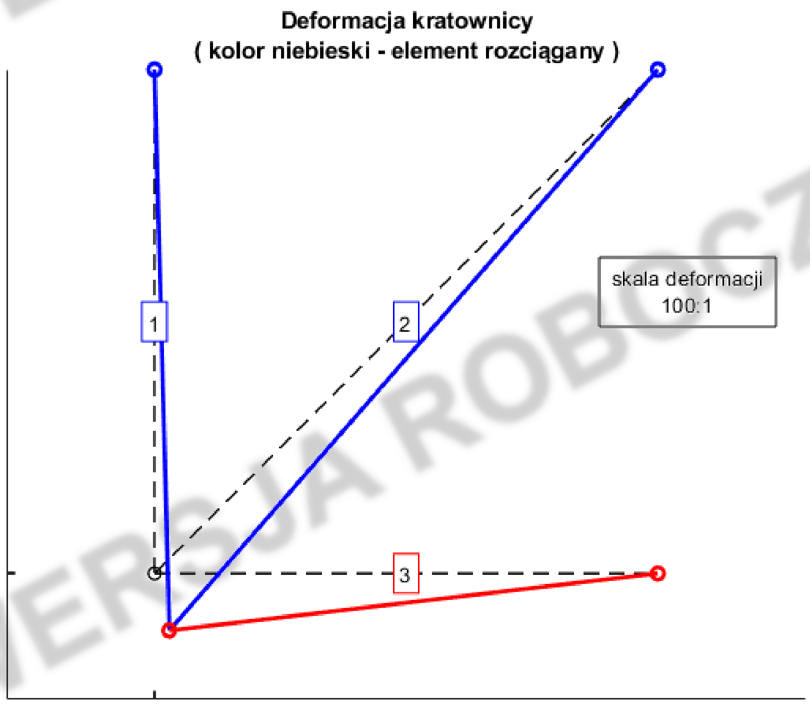
Rozwiązanie układu prowadzi do:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00135EA & 0{,}00035EA \\ 0{,}00035EA & 0{,}00135EA \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \end{pmatrix}$$

Stąd, po wykonaniu operacji odwracania macierzy i mnożenia, <u>składowe przemieszczenie</u> węzła numer 1 wynoszą:

$$u_1 = 0{,}296, \quad u_2 = -1{,}133\ mm$$

Pozostałe węzły nie doznają przemieszczeń, ponieważ pokrywają się z podporami kratownicy. Rys. 4 prezentuje deformację kratownicy pod wpływem działania siły P.



Rys. 4. Deformacja kratownicy na tle konstrukcji nieodkształconej

Następnie wartości <u>sił w węzłach, w układzie globalnym</u>, wyznaczyć można, z równania dla całej konstrukcji, jako:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{Kd}$$

i wynoszą one:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,000 \\ 0 \\ 0,793 \\ 0,207 \\ 0,207 \\ -0,207 \\ 0 \end{pmatrix} kN$$

Znając globalne przemieszczenia węzłów naprężenie w elementach wyznaczyć można z zależności:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \frac{\boldsymbol{E}^{(e)}}{\boldsymbol{l}^{(e)}}\left[-\boldsymbol{c}^{(e)} \quad -\boldsymbol{s}^{(e)} \quad \boldsymbol{c}^{(e)} \quad \boldsymbol{s}^{(e)}\right]\boldsymbol{u}^{(e)}$$

otrzymujemy:

$$\sigma^{(1)} = 79{,}3\ MPa, \quad \sigma^{(2)} = 29{,}3\ MPa, \quad \sigma^{(3)} = -20{,}7\ MPa$$

Odkształcenie elementów wyznaczyć można z prawa Hooke'a.

Przemieszczenia węzłów w układzie lokalnym dla danego elementu określa się jako:

$$\boldsymbol{u}'^{(e)} = \boldsymbol{L}^{(e)}\boldsymbol{u}^{(e)}$$

co w rozpatrywanym przypadku prowadzi do:

$$\boldsymbol{u_1'}^{(1)} = -\boldsymbol{1,13\ mm}; \qquad \boldsymbol{u_2'}^{(1)} = \boldsymbol{0\ mm}$$
$$\boldsymbol{u_1'}^{(2)} = -\boldsymbol{0,592\ mm}; \qquad \boldsymbol{u_2'}^{(2)} = \boldsymbol{0\ mm}$$
$$\boldsymbol{u_1'}^{(3)} = \boldsymbol{0,296\ mm}; \qquad \boldsymbol{u_2'}^{(3)} = \boldsymbol{0\ mm}$$

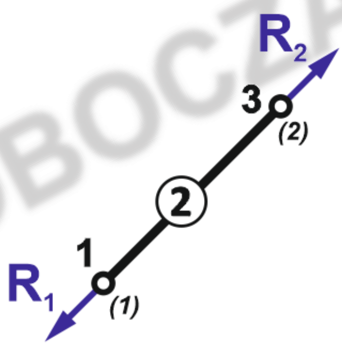
Wartości sił węzłowych w układzie lokalnym wynikają z równania elementu:

$$\boldsymbol{R}^{(e)} = \boldsymbol{k}'^{(e)}\boldsymbol{u}'^{(e)}$$

po podstawieniu danych zadania:

$$\begin{pmatrix} {R_1}^{(1)} \\ {R_2}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-0,793} \\ \boldsymbol{0,793} \end{pmatrix} kN, \qquad \begin{pmatrix} {R_1}^{(2)} \\ {R_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}293 \\ 0{,}293 \end{pmatrix} kN, \qquad \begin{pmatrix} {R_1}^{(3)} \\ {R_2}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}207 \\ -0{,}207 \end{pmatrix} kN$$

Na podstawie znajomości lokalnych sił węzłowych i lokalnych przemieszczeń można w sposób jednoznaczny określić czy element jest rozciągany czy ściskany.
Przykładowo, na rys. 5 przedstawiono siły węzłowe w elemencie 2. Obliczenia wykazały, że siła w węźle 1 jest ujemna. Znaczy to, że skierowana jest przeciwnie do zwrotu lokalnej osi biegnącej od węzła 1 do węzła 2 elementu. W węźle drugim siła jest dodatnia, co powoduje, iż układ sił działających na element powoduje jego rozciąganie.



Rys. 5

Podobną analizę przeprowadzić można rozpatrując lokalne przemieszczenia $\boldsymbol{u}'$ dla każdego z prętów kratownicy.

Odkształcenie elementów, znając przemieszczenia węzłów w układzie lokalnym, wyznaczyć można jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \frac{\boldsymbol{u}_2'^{(e)} - \boldsymbol{u}_1'^{(e)}}{\boldsymbol{l}^{(e)}}$$

otrzymujemy:

$$\varepsilon^{(1)} = 11{,}30 \cdot 10^{-4}; \qquad \varepsilon^{(2)} = 4{,}18 \cdot 10^{-4}; \qquad \varepsilon^{(3)} = -2{,}96 \cdot 10^{-4}$$

Znajomość prawa fizycznego wiążącego odkształcenie z naprężeniem prowadzi do:

$$\sigma^{(e)} = E^{(e)}\varepsilon^{(e)}$$

co prowadzi do:

$$\sigma^{(1)} = 79{,}3\ MPa; \qquad \sigma^{(2)} = 29{,}3\ MPa; \qquad \sigma^{(3)} = -20{,}7\ MPa$$

dzięki czemu możliwym jest również znalezienie sił wewnętrznych w elementach:

$$N^{(e)} = \sigma^{(e)} A^{(e)}$$

w efekcie:

$$N^{(1)} = 0{,}793\ kN; \qquad N^{(2)} = 0{,}293\ kN; \qquad N^{(3)} = -0{,}207\ kN$$

WERSJA ROBOCZA

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Podać wartość naprężenia w kratownicy z przykładu, w której usunięto pręt numer 3 i obciążenie w węźle 1 zmieniono na poziome i skierowane w lewą stronę (wartość siły bez zmian).

   Odp.: $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbf{-100,00}\ \boldsymbol{MPa}$; $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{141,42}\ \boldsymbol{MPa}$

2. Podać wartość naprężenia w kratownicy z przykładu, w której usunięto pręt numer 2 i w węźle 1 przyłożono siły $\boldsymbol{Px} = \mathbf{-1}\ \boldsymbol{kN}$ i $\boldsymbol{Py} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{kN}$.

   Odp.:$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbf{-100}\ \boldsymbol{MPa}$; $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{100}\ \boldsymbol{MPa}$ (**pręt w przykładzie oznaczony jako 3**)

LITERATURA

1. Bhatti M.A.: *Fundamental Finite Element Analysis and Applications*, Wiley, 2005
2. Ferreira A.J.M.: *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*, Springer*,* 2009
3. Kattan P.: *MATLAB Guide to Finite Elements: An interactive Approach*, Springer, 2008
4. Kopecki H., Kopecki T., Święch Ł.: Zagadnienia wytrzymałości konstrukcji lotniczych, Oficyna Wydawnicza PRz 2023
5. Rakowski T., Kasprzyk Z.: *Metoda Elementów Skończonych w Mechanice Konstrukcji, OWPW Warszawa 1993*
6. Rakowski T.: *Macierzowa Analiza Konstrukcji*, PWN, 1979