

Politechnika Rzeszowska
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa

Katedra Samolotów i Silników Lotniczych

Pomoce dydaktyczne
Wytrzymałość Materiałów

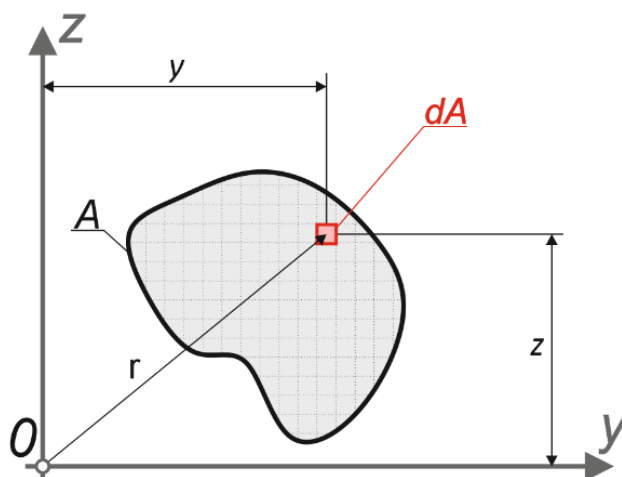
CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE
FIGUR PŁASKICH

Łukasz Święch

Rzeszów, 2018

1. Podstawy teoretyczne

Rozpatrzmy dowolną figurę płaską o polu A leżącą w płaszczyźnie określonej w układzie współrzędnych YZ (rys. 1.1). Figurę podzielono na nieskończenie wiele pól elementarnych dA odległych odpowiednio o y i z od osi Z i Y . Figura taka cechuje się właściwościami, nazywanymi charakterystykami geometrycznymi, z których podstawowe zdefiniowano poniżej.



Rys.1.1

Pole figury

Pole figury A definiujemy, jako sumę pól elementarnych dA .

$$A = \int_A dA \quad (1)$$

Momenty statyczne pola figury względem osi

Momentem statycznym pola figury względem osi nazywamy sumę iloczynów pól elementarnych dA przez ich odległości od tej osi.

$$S_y = \int_A z dA, \quad S_z = \int_A y dA \quad (2)$$

UWAGA

Moment statyczny pola figury płaskiej względem osi przechodzącej przez środek ciężkości figury jest równy zero, oś taką nazywamy **osią centralną**.

Środek ciężkości figury

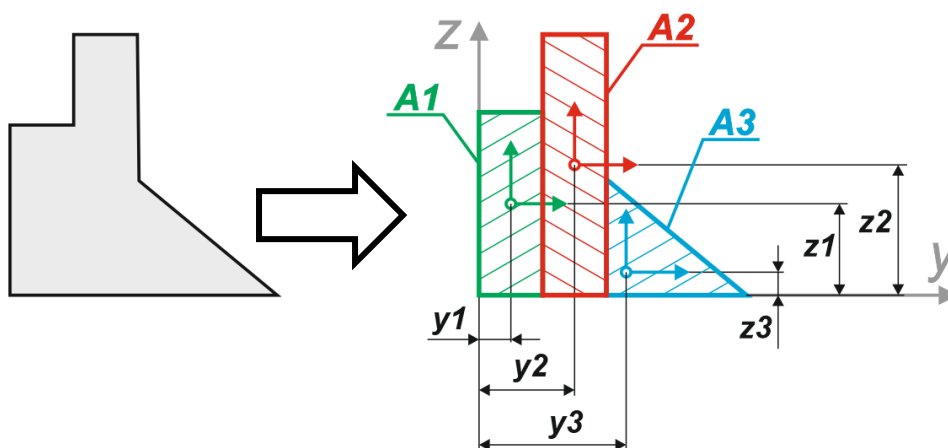
$$y_{sc} = \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y dA}{A}, \quad z_{sc} = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z dA}{A} \quad (3)$$

W przypadku figur złożonych z wielu figur podstawowych (np. prostokątów, trójkątów) sumy ciągłe we wzorach (3) zastąpić można sumowaniem iloczynów współrzędnej środka ciężkości i pola poszczególnych figur. Przykładowo dla figury z rysunku 1.2 położenie osi centralnych wyznacza się, jako:

$$y_{sc} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}, \quad z_{sc} = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Ogólnie, kiedy figura składa się n składowych, zależności powyższe przyjmą postać:

$$y_{sc} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}, \quad z_{sc} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$



Rys.1.2.

UWAGA

W figurach symetrycznych środek ciężkości leży na **osi symetrii figury**.

Moment bezwładności figury względem osi (osiowy moment bezwładności)

Osiowym momentem bezwładności figury nazywamy sumę iloczynów pól elementarnych dA przez kwadraty ich odległości od tej osi.

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (5)$$

Biegunowy moment bezwładności

Biegunowym momentem bezwładności figury nazywamy sumę iloczynów pól elementarnych dA przez kwadraty ich odległości od bieguna.

$$I_0 = \int_A r^2 dA \quad (6)$$

UWAGA

Na podstawie rysunku 1.1 łatwo zauważyć, że: $r^2 = y^2 + z^2$

Po podstawieniu tej równości do zależności (6) otrzymamy:

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y$$

Biegunowy moment bezwładności jest sumą momentów osiowych względem prostopadłych osi przechodzących przez ten biegun.

Moment dewiacji względem układu osi (moment odśrodkowy)

Momentem dewiacji figury względem układu osi nazywamy sumę iloczynów pól elementarnych dA przez ich odległości od każdej z dwóch osi.

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (7)$$

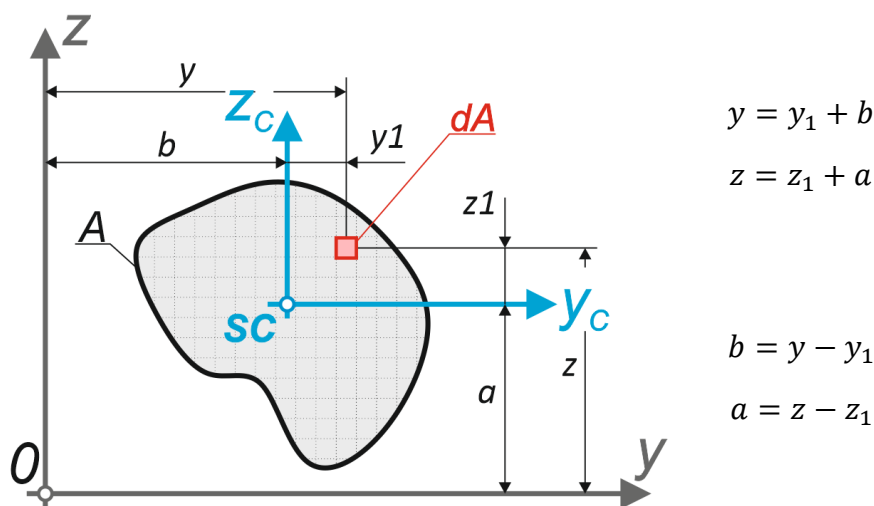
UWAGA

Moment dewiacji względem osi, z których minimum jedna **pokrywa się z osią symetrii** figury wynosi zero.

Osie względem, których moment odśrodkowy jest równy zero nazywa się **centralnymi osiami głównymi**.

TWIERDZENIE STEINERA

Twierdzenie to umożliwia wyznaczenie wartości momentów bezwładności względem układu osi YZ przesuniętych względem układu centralnego Y_cZ_c o wartości a i b .



Rys. 1.3.

Podstawiając do wzoru (5) definiującego moment bezwładności względem osi Y wyrażenie na odległość z będącą miarą oddalenia elementarnego pola dA od tej osi otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (z_1 + a)^2 dA = \int_A (z_1^2 + 2z_1a + a^2) dA = \\
 &= \underbrace{\int_A z_1^2 dA}_{I_{yc}} + 2a \underbrace{\int_A z_1 dA}_{S_{yc} = 0} + a^2 \underbrace{\int_A dA}_A = I_{yc} + a^2 A
 \end{aligned}$$

W wyrażeniu powyższym pierwszy człon (I_{yc}) rozumieć należy, jako moment bezwładności figury o polu A względem jej osi centralnej Y_c . Człon drugi reprezentuje moment statyczny pola tej figury względem tej samej osi, toteż wartość ta musi wynosić zero. Człon ostatni natomiast jest iloczynem kwadratu odległości pomiędzy dowolną osią Y , a osią centralną Y_c przez pole tej figury.

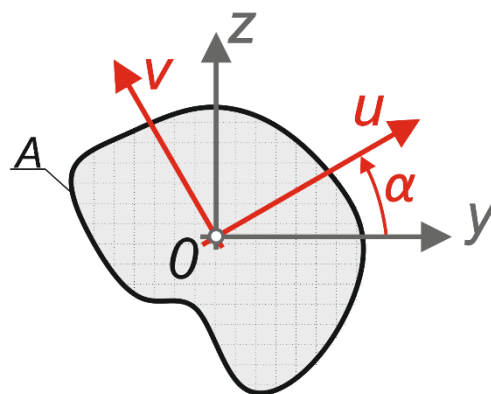
Analogiczny tok rozumowania zastosować można dla drugiego z momentów osiowych oraz dla momentu odśrodkowego. W efekcie otrzymuje się zależności umożliwiające wyznaczanie momentów bezwładności względem układu osi przesuniętych:

$$\begin{aligned}
 I_y &= I_{yc} + a^2 A \\
 I_z &= I_{zc} + b^2 A \\
 I_{yz} &= I_{yczc} + ab \cdot A
 \end{aligned} \tag{8}$$

Momenty bezwładności względem układu osi obróconych

W celu określenia wartości momentów bezwładności względem układu osi UV obróconego względem układu YZ o kąt α należy skorzystać z następujących wzorów transformacyjnych:

$$\begin{aligned} I_u &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_v &= I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{uv} &= I_{yz} \cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (9)$$



Rys. 1.4.

Wzory (9) są słuszne pod warunkiem przyjęcia za obrót dodatni, kierunku trygonometrycznego (patrz rys.1.4).

Główne momenty i kierunki bezwładności

Ze zbioru nieskończenie wielu możliwych położeń osi UV znaleźć można szczególny układ względem, którego osiowe momenty bezwładności przyjmą wartości maksymalną i minimalną. Układ taki nazywa się **układem głównym**, a jeżeli przechodzi również przez środek ciężkości figury nosi nazwę **głównego centralnego układu osi**.

Wartości głównych momentów bezwładności wyznacza się, jako:

$$\begin{aligned} I_{max} &= I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \\ I_{min} &= I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Kąt, o jaki należy obrócić dowolny układ osi YZ , aby stał się układem głównym danej figury oblicza się z zależności:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (11)$$

Informację, o jaki kąt należy obrócić oś poziomą układu współrzędnych, aby pokryła się z osią względem, której moment bezwładności jest maksymalny (α_{max}) oraz minimalny (α_{min}), dostarczają wyrażenia:

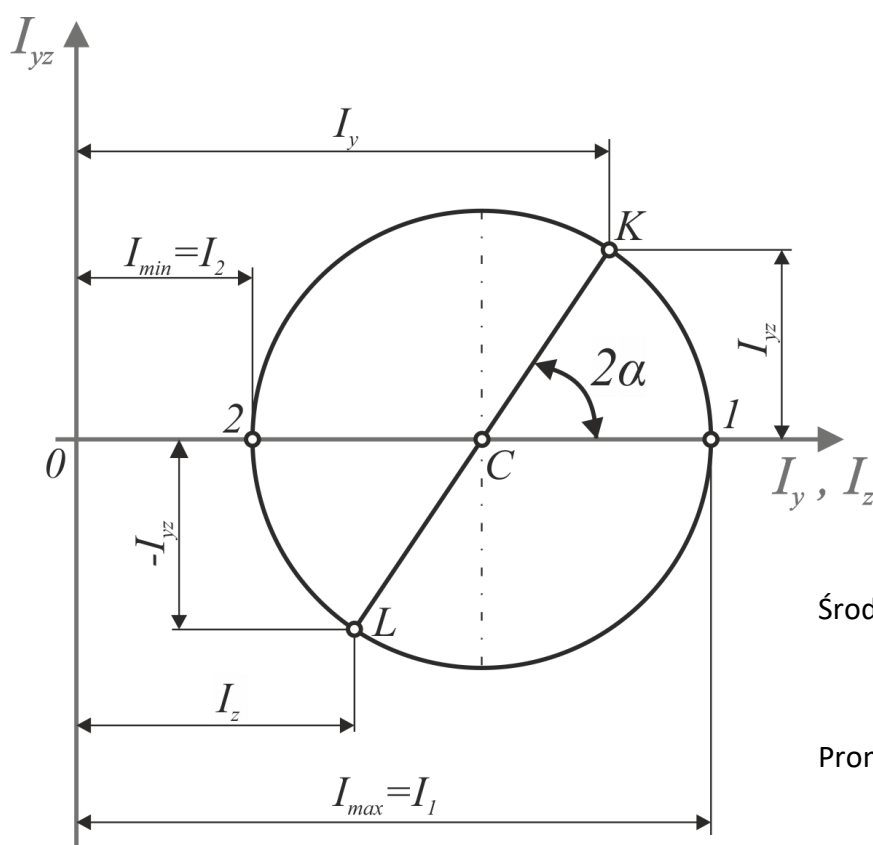
$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{I_{yz}}{I_z - I_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{min} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{I_{yz}}{I_z - I_2} \quad (12)$$

Koło Mohra dla momentów bezwładności

Graficzną reprezentacją zbioru wszystkich wartości momentów bezwładności cechujących daną figurę stanowi tzw. **koło Mohra**.

Koło Mohra wykreśla się w układzie współrzędnych, w którym na osi poziomej odmierzamy wartości osiowych momentów bezwładności (I_y , I_z), na osi pionowej natomiast wartości odśrodkowego momentu bezwładności (I_{yz}).

Położenie środka koła Mohra wyznacza długość odcinka $\overline{OC}$. Punkty przecięcia obwodu koła z osią poziomą (**1**, **2**) wskazują wartości głównych momentów bezwładności (I_1 , I_2). Punkty **K** i **L** reprezentują wartości momentów bezwładności względem układu osi obróconych, o kąt α w stosunku do układu głównego.



Rys. 1.5.

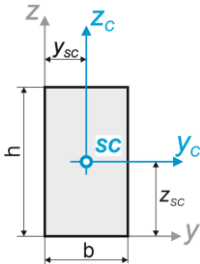
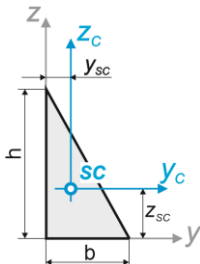
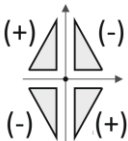
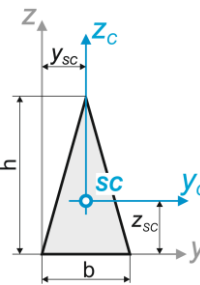
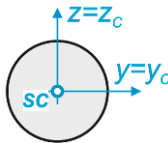
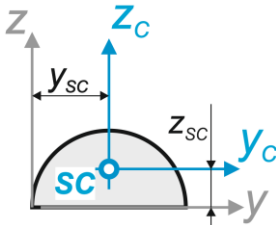
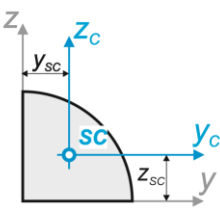
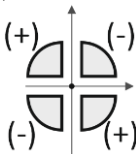
Środek koła:

$$\overline{OC} = \frac{I_y + I_z}{2}$$

Promień koła:

$$r = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Tablica 1. Momenty bezwładności figur podstawowych

Figura		Momenty bezwładności względem osi centralnych	Odśrodkowy moment bezwładności względem układu osi centralnych
	$A = b \cdot h$ $y_{sc} = b/2$ $z_{sc} = h/2$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{z_c} = \frac{b^3h}{12}$	$I_{yzc} = 0$
	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$ $y_{sc} = b/3$ $z_{sc} = h/3$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_{z_c} = \frac{b^3h}{36}$	$I_{yzc} = \pm \frac{b^2h^2}{72}$ 
	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$ $y_{sc} = b/2$ $z_{sc} = h/3$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_{z_c} = \frac{b^3h}{48}$	$I_{yzc} = 0$
	$A = \pi r^2$	$I_{y_c} = I_{z_c} = \frac{\pi r^4}{4}$	$I_{yzc} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $y_{sc} = r$ $z_{sc} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{y_c} = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,11 r^4$ $I_{z_c} = \frac{\pi r^4}{8}$	$I_{yzc} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{4}$ $y_{sc} = \frac{4r}{3\pi}$ $z_{sc} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{y_c} = I_{z_c} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) \approx 0,055 \cdot r^4$	$I_{yzc} = \pm \left(\frac{r^4}{8} - \frac{4r^4}{9\pi} \right) \approx \pm 0,0165 \cdot r^4$ 

2. PRZYKŁADY – zastosowanie teorii

2.1. Znaleźć współrzędną z_{sc} środka ciężkości trójkąta

Pole trójkąta oraz pole elementarnego wycinka pola:

$$A = \frac{1}{2}bh, \quad dA = s \, dz$$

Z podobieństwa trójkątów wyznaczyć można długość s :

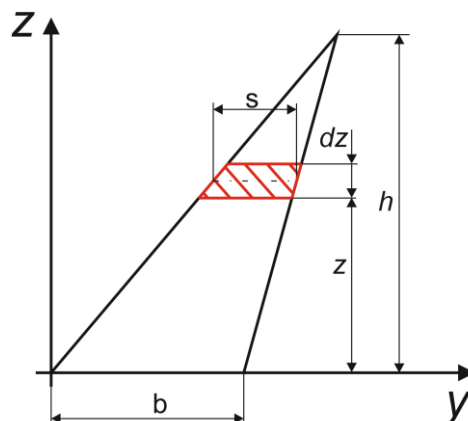
$$\frac{s}{b} = \frac{h-z}{h} \Rightarrow s = \frac{b}{h}(h-z)$$

Współrzędną z_{sc} wyznacza się, zatem jako:

$$z_{sc} = \frac{S_y}{A}$$

$$z_{sc} = \frac{\int_0^h z \frac{b}{h}(h-z) \, dz}{\frac{1}{2}bh} = \frac{2}{h^2} \int_0^h (hz - z^2) \, dz = \frac{2}{h^2} \left\{ h \frac{z^2}{2} \Big|_0^h - \frac{z^3}{3} \Big|_0^h \right\} = \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right\}$$

$$z_{sc} = \frac{h}{3}$$



Rys. 2.1

2.2. Znaleźć współrzędną z_{sc} środka ciężkości ćwiartki koła

Zadanie rozwiązane zostanie w biegunowym układzie współrzędnych, dla którego zachodzi zależność:

$$z = \rho \sin \varphi, \quad y = \rho \cos \varphi$$

$$dA = \rho \, d\rho \, d\varphi$$

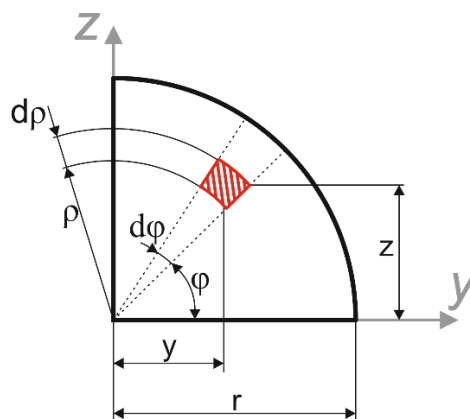
Moment statyczny pola figury względem osi y wynosi:

$$S_y = \int_A z \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^r \rho \sin \varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^r \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{r^3}{3} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{r^3}{3}$$

Współrzędną środka ciężkości przyjmuje zatem wartość:

$$z_{sc} = \frac{4r}{3\pi}$$



Rys. 2.2

2.3. Znaleźć współrzędną z_{sc} środka ciężkości ćwiartki koła (drugi sposób)

Pole figury oraz pole elementarnego wycinka pola:

$$dA = s \, dz, \quad A = \frac{\pi r^2}{4}$$

gdzie:

$$s = \sqrt{r^2 - z^2}$$

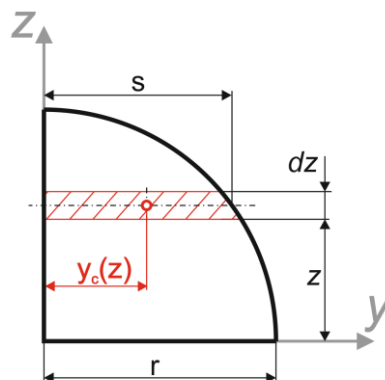
Moment statyczny pola figury względem osi y wynosi:

$$S_y = \int_A z \, dA = \int_0^r z \cdot \sqrt{r^2 - z^2} \, dz$$

$$S_y = \left\{ \begin{array}{l} t = r^2 - z^2 \\ dt = -2z \, dz \\ z \, dz = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \int_{r^2}^0 -\frac{1}{2} \sqrt{t} \, dt$$

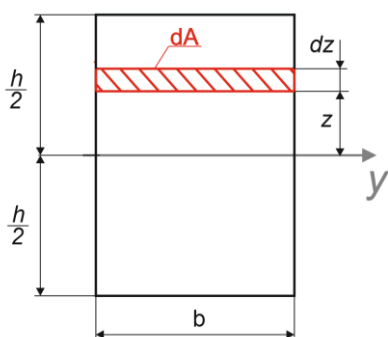
$$S_y = \left(-\frac{(\sqrt{t})^3}{3} \right) \Big|_{r^2}^0 = 0 - \left(-\frac{r^3}{3} \right) = \frac{r^3}{3}$$

$$z_{sc} = \frac{S_y}{A} \Rightarrow z_{sc} = \frac{4r}{3\pi}$$

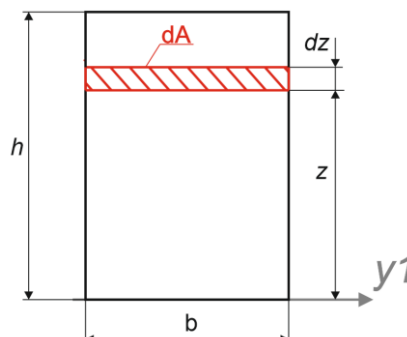


Rys. 2.3

2.4. Wyznaczyć moment bezwładności prostokąta względem osi równoległej do podstawy i przechodzącej przez jego środek ciężkości (rys.2.4a) oraz osi przechodzącej przez krawędź podstawy (rys.2.4b)



Rys. 2.4a



Rys. 2.4b

$$I_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \, b \, dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_1} = \int_0^h z^2 \, b \, dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

2.5. Wyznaczyć moment bezwładności ćwiartki koła względem osi y przechodzącej przez krawędź figury

Zadanie rozwiązane zostanie w biegunowym układzie współrzędnych, dla którego zachodzi zależność:

$$z = \rho \sin \varphi, \quad y = \rho \cos \varphi$$

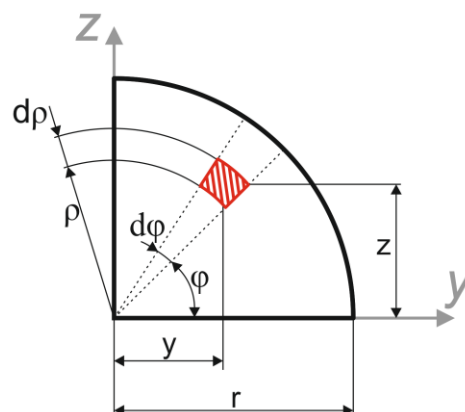
$$dA = \rho \, d\rho \, d\varphi$$

Moment bezwładności wyrazi się jako:

$$I_y = \int_A z^2 \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^r (\rho \sin \varphi)^2 \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$I_y = \int_0^r \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

$$I_y = \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \, d\varphi$$



Rys. 2.5

Całkę $\sin^2 \varphi$ obliczyć można stosując zasadę całkowania przez części:

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \int \sin \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \int \sin \varphi (-\cos \varphi) \, d\varphi$$

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi - \int \cos \varphi (-\cos \varphi) \, d\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi + \int \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi + \int (1 - \sin^2 \varphi) \, d\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi + \int d\varphi - \int \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

$$2 \int \sin^2 \varphi \, d\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi + \varphi$$

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi$$

Wykorzystując powyższe:

$$I_y = \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r \cdot \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$I_y = \frac{r^4}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) - \frac{r^4}{4} \cdot \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \cos 0 \right) = \frac{r^4}{4} \cdot \frac{\pi}{4}$$

Ostatecznie:

$$I_y = \frac{\pi r^4}{16}$$

2.6. Wyznaczyć moment bezwładności trójkąta względem osi y przechodzącej przez jego podstawę. Następnie korzystając z twierdzenia Steinera znaleźć moment bezwładności względem centralnej osi y_c .

Elementarne pole figury wyznacza się jako:

$$dA = s \, dz$$

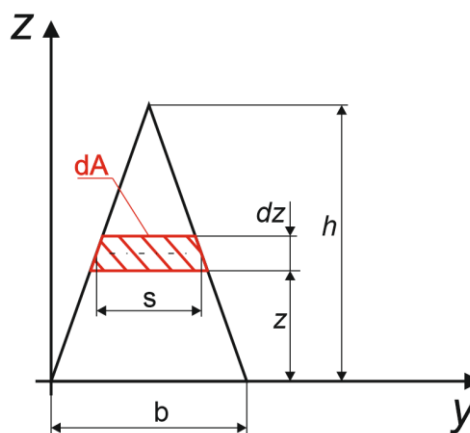
gdzie:

$$\frac{s}{b} = \frac{h-z}{h} \Rightarrow s = \frac{b}{h}(h-z)$$

Moment bezwładności względem osi Y :

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 \, dA = \int_0^h z^2 \frac{b}{h}(h-z) \, dz = \\ &= b \int_0^h \left(z^2 - \frac{z^3}{h} \right) dz = b \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4h} \right) \Big|_0^h \end{aligned}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$



Rys. 2.6a

Wiedząc, że odległość pomiędzy osiami y i y_c wynosi:

$$z_{sc} = \frac{h}{3}$$

pole trójkąta:

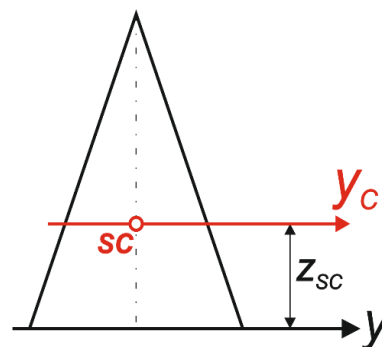
$$A = \frac{bh}{2}$$

Moment bezwładności względem osi y_c wyrazić można, jako:

$$I_{y_c} = I_y - z_{sc}^2 A$$

$$I_{y_c} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3} \right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$$



Rys. 2.6b

2.7. Wyznaczyć moment bezwładności trójkąta równoramiennego względem osi pionowej pokrywającej się z osią symetrii figury

Elementarne pole figury wyznacza się jako:

$$dA = s \, dy$$

gdzie:

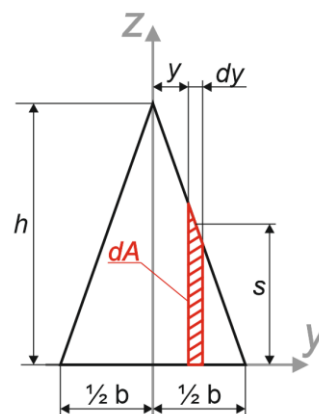
$$\frac{s}{h} = \frac{\frac{b}{2} - y}{\frac{b}{2}} \quad s = \frac{2h}{b} \left(\frac{b}{2} - y \right)$$

Moment bezwładności względem osi **Z**, ze względu na symetrię, równy będzie podwojonemu momentowi połówki trójkąta:

$$I_z = 2 \int_A y^2 \, dA = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} y^2 \frac{2h}{b} \left(\frac{b}{2} - y \right) dy = \frac{2h}{b} 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\frac{b}{2} y^2 - y^3 \right) dy$$

$$I_z = \frac{4h}{b} \left(\frac{b}{2} \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{4h}{b} \left(\frac{b \left(\frac{b}{2} \right)^3}{6} - \frac{\left(\frac{b}{2} \right)^4}{4} \right)$$

$$I_z = \frac{hb^3}{48}$$

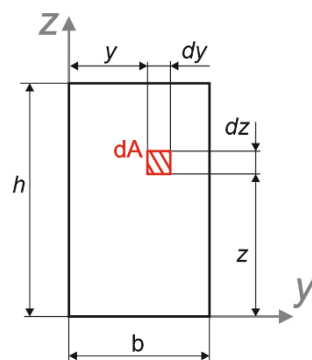


Rys. 2.7

2.8. Wyznaczyć moment odśrodkowy prostokąta względem układu osi przecinającego się w narożu figury

Metoda obliczeń przy wyborze pola elementarnego w postaci $dA = dy \cdot dz$ (rys. 2.8a):

$$I_{yz} = \int_A yz \, dA = \int_0^h \left(\int_0^b y \, dy \right) z \, dz = \int_0^h \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^b z \, dz = \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^h \Rightarrow I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

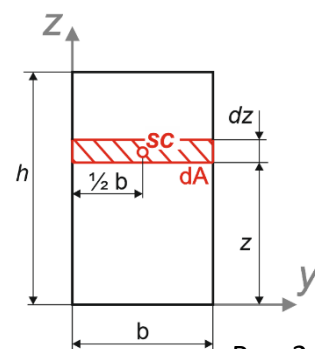


Rys. 2.8a

Metoda obliczeń przy wyborze pola elementarnego w postaci $dA = b \cdot dz$ (rys. 2.8b):

$$I_{yz} = \int_A yz \, dA = \int_0^h z y_{sc} b \, dz = \int_0^h z \frac{b}{2} b \, dz = \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^h$$

$$I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{4}$$



Rys. 2.8b

2.9. Wyznaczyć moment odśrodkowy ćwiartki koła względem układu osi przecinającego się w narożu figury. Następnie korzystając z twierdzenia Steinera znaleźć odśrodkowy moment bezwładności względem osi centralnych figury

Elementarne pole figury wyznacza się jako:

$$dA = s \, dz$$

gdzie:

$$s = \sqrt{r^2 - z^2}$$

Środek ciężkości pola elementarnego:

$$y_c(z) = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - z^2}$$

Moment odśrodkowy:

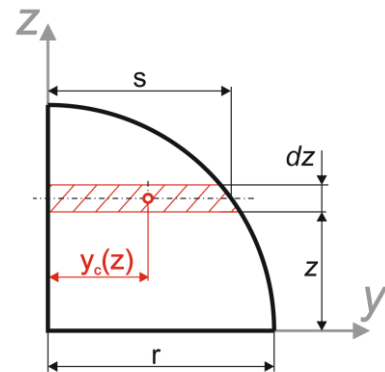
$$I_{yz} = \int_A yz \, dA = \int_A y_c(z) z \, dA = \int_0^r y_c(z) z s \, dz$$

$$I_{yz} = \int_0^r \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - z^2} z \sqrt{r^2 - z^2} \, dz$$

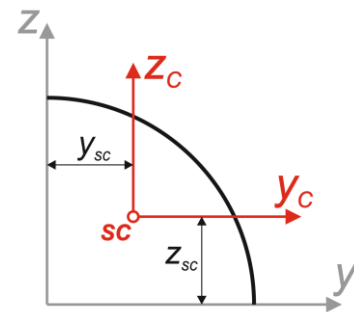
$$I_{yz} = \frac{1}{2} \int_0^r z (r^2 - z^2) \, dz$$

$$I_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2 z^2}{2} \Big|_0^r - \frac{z^4}{4} \Big|_0^r \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right)$$

$$I_{yz} = \frac{r^4}{8}$$



Rys. 2.9a



Rys. 2.9b

Zgodnie z rysunkiem 2.9b odległości pomiędzy osiami yz , a osiami centralnymi wynoszą:

$$y_{sc} = z_{sc} = \frac{4r}{3\pi} \quad (\text{patrz zadanie 2.3 lub tablica 1})$$

Odśrodkowy moment bezwładności wyrazić można jako:

$$I_{y_c z_c} = I_{yz} - y_{sc} z_{sc} A \Rightarrow I_{y_c z_c} = \frac{r^4}{8} - \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 \frac{\pi r^2}{4}$$

Ostatecznie:

$$I_{y_c z_c} \approx -0,0165 r^4$$

2.10. Wyznaczyć moment bezwładności koła względem bieguna pokrywającego się z jego środkiem

Biegunowy moment bezwładności określany jest, jako:

$$I_0 = \int_A r^2 dA$$

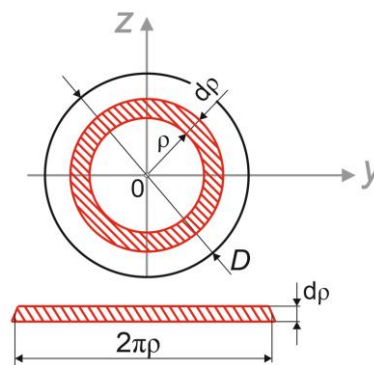
Jako pole elementarne dA przyjąć można pole pierścienia o szerokości $d\rho$ i obwodzie $2\pi\rho$:

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

Moment bezwładności obliczamy wtedy, jako:

$$I_0 = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_0^r$$

$$I_0 = \frac{\pi r^4}{2} \quad \text{lub} \quad I_0 = \frac{\pi D^4}{32}$$



Rys.2.10

Pomiędzy momentami osiowymi, a momentem biegunowym zachodzi zależność:

$$I_0 = I_z + I_y$$

Wartości osiowych momentów bezwładności I_y i I_z określić można wykorzystując wynik zadania 2.5 lub korzystając z informacji zawartych w tabeli 1:

$$I_{y_c} = I_{z_c} = \frac{\pi r^4}{4}$$

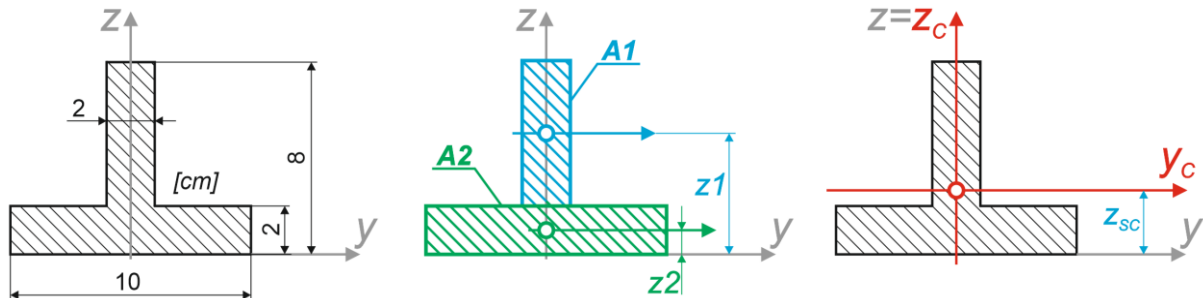
Biegunowy moment bezwładności przyjmie, zatem wartość:

$$I_0 = I_{y_c} + I_{z_c} = 2 \cdot \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_0 = \frac{\pi r^4}{2}$$

3. Przykłady wyznaczania charakterystyk geometrycznych figur złożonych

3.1. Wyznaczyć centralne momenty bezwładności przekroju podanego na rys.3.1



Rys. 3.1

Rozpatrywana figura posiada oś symetrii z_c pokrywającą się z osią z . Do wyznaczenia pozostaje położenie osi y_c . W celu tym podzielić można jej pole na dwie części (rys. 3.1) w postaci prostokątów o polach przekroju odpowiednio A_1 i A_2 .

Współrzedną z_{sc} określającą położenie osi y_c wyznacza się, według wzoru 4, jako:

$$z_{sc} = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 12 + 1 \cdot 20}{12 + 20} = 2,5 \text{ [cm]}$$

Moment bezwładności względem osi $z \equiv z_c$ wyznacza się jako sumę momentów bezwładności pól figur składowych względem tej osi. Korzystając z rozwiązania zadania 2.4a lub z tablicy 1:

$$I_{z_c} = \left(\frac{6 \cdot 2^3}{12} \right) + \left(\frac{2 \cdot 10^3}{12} \right) \Rightarrow I_{z_c} = 170,67 \text{ [cm}^4\text{]}$$

Określenie wartości momentu bezwładności pola figury względem osi centralnej y_c wymaga wykorzystania twierdzenia Steinera. Moment ten wynosi:

$$I_{y_c} = [I_{y_{c1}} + (z_1 - z_{sc})^2 \cdot A_1] + [I_{y_{c2}} + (z_2 - z_{sc})^2 \cdot A_2]$$

$$I_{y_c} = \left[\frac{2 \cdot 6^3}{12} + (5 - 2,5)^2 \cdot 12 \right] + \left[\frac{10 \cdot 2^3}{12} + (1 - 2,5)^2 \cdot 20 \right] = 111,00 + 51,67$$

$$I_{y_c} = 162,67 \text{ [cm}^4\text{]}$$

3.2. Wyznaczyć biegunowy moment bezwładności drążonego przekroju kołowego (rys.3.2)

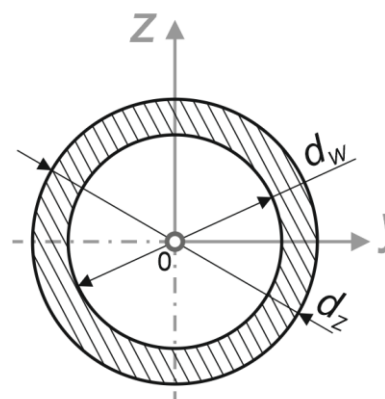
Pole przekroju rozpatrywanej figury wyznaczyć można jako różnicę pola koła o średnicy d_z i koła o średnicy d_w .

Moment bezwładności wyznacza się dla pola figury, zatem poszukiwana wielkość będzie różnicą momentów bezwładności kół o średnicy d_z i d_w .

Wykorzystując wynik zadania 2.10 otrzymamy:

$$I_0 = \frac{\pi d_z^4}{32} - \frac{\pi d_w^4}{32}$$

$$I_0 = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{32}$$



Rys. 3.2

3.3. Wyznaczyć biegunowy moment bezwładności drążonego przekroju kołowego (rys.3.3)

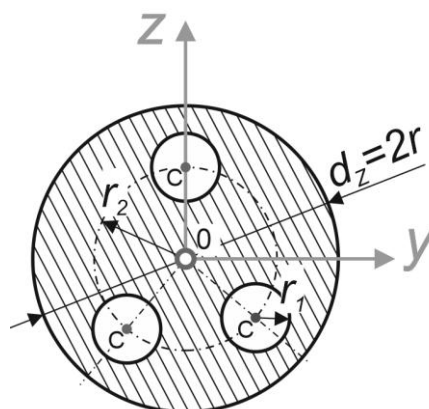
Moment odśrodkowy pola rozpatrywanej figury obliczyć można wykorzystując twierdzenie Steinera w postaci:

$$I_0 = I_{0c} + \rho_c^2 A$$

gdzie przez I_{0c} rozumieć należy odśrodkowy moment bezwładności figury względem jej środka ciężkości C , a przez ρ_c odległość między początkiem układu O , a tymże punktem C .

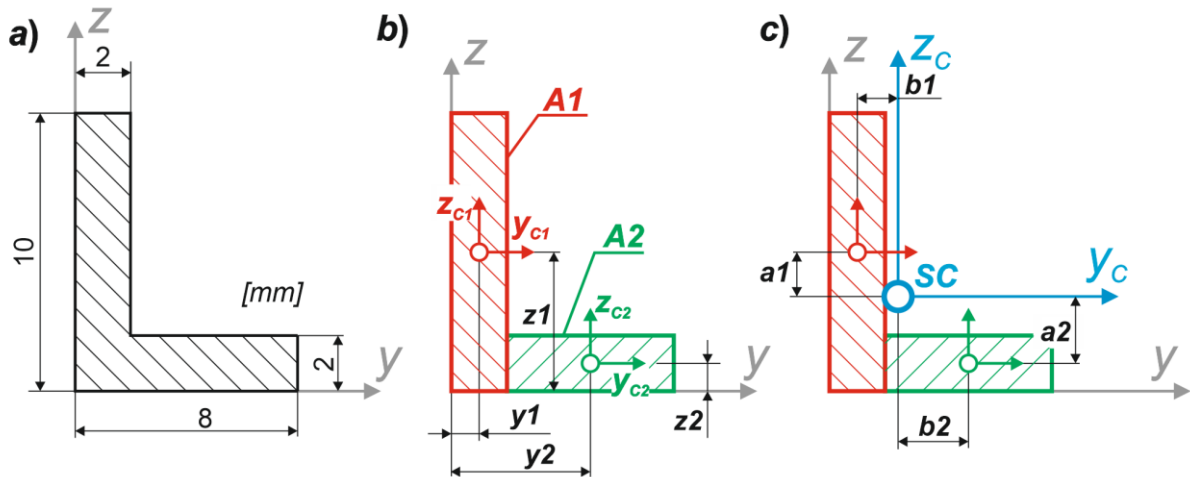
W rozważanym przypadku odśrodkowy moment bezwładności figury złożonej wynosi:

$$I_0 = \frac{\pi r^4}{2} - 3 \left(\frac{\pi r_1^4}{2} + r_2^2 \cdot \pi r_1^2 \right)$$



Rys. 3.3

3.4. Wyznaczyć główne momenty bezwładności kątownika przedstawionego na rysunku 3.4.1a.



Rys. 3.4.1

Procedura rozwiązania:

1. Podział na figury proste

Kątownik dzielimy na dwa prostokąty pokazane na rysunku 3.4.1b. Dla każdej z tych figur należy określić położenie środka ciężkości względem układu osi YZ oraz ich pole przekroju poprzecznego.

Figura 1:

$$y_1 = 1 \text{ [mm]}$$

$$z_1 = 5 \text{ [mm]}$$

$$A_1 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ [mm}^2\text{]}$$

Figura 2:

$$y_2 = 2 + \frac{6}{2} = 2 + 3 = 5 \text{ [mm]}$$

$$z_2 = 1 \text{ [mm]}$$

$$A_2 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ [mm}^2\text{]}$$

2. Wyznaczenie współrzędnych środka ciężkości figury złożonej

$$z_{sc} = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 20 + 1 \cdot 12}{20 + 12} = 3,5 \text{ [mm]}$$

$$y_{sc} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1 \cdot 20 + 5 \cdot 12}{20 + 12} = 2,5 \text{ [mm]}$$

3. Określenie wartości momentów bezwładności względem osi centralnych

Rozpatrywany kątownik składa się z dwóch figur prostych. W celu wyznaczenia momentów bezwładności względem osi centralnych kątownika należy posłużyć się twierdzeniem Steinera.

$$I_{y_c} = (I_{y_{c1}} + a_1^2 \cdot A_1) + (I_{y_{c2}} + a_2^2 \cdot A_2)$$

$$I_{z_c} = (I_{z_{c1}} + b_1^2 \cdot A_1) + (I_{z_{c2}} + b_2^2 \cdot A_2)$$

$$I_{y_c z_c} = (I_{y_{c1} z_{c1}} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1) + (I_{y_{c2} z_{c2}} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2)$$

Wartości $I_{y_{sc1}}$, $I_{z_{sc1}}$, itd. wyznaczamy z pomocą informacji zawartych w tablicy 1. Odległości pomiędzy osiami, w rozważanym przypadku, wynoszą:

$$a_1 = z_1 - z_{sc} = 5 - 3,5 = 1,5 \text{ [mm]}$$

$$b_1 = y_1 - y_{sc} = 1 - 2,5 = -1,5 \text{ [mm]}$$

$$a_2 = z_2 - z_{sc} = 1 - 3,5 = -2,5 \text{ [mm]}$$

$$b_2 = y_2 - y_{sc} = 5 - 2,5 = 2,5 \text{ [mm]}$$

Momenty bezwładności względem osi centralnych przyjmują wartości:

$$I_{y_c} = \left(\frac{2 \cdot 10^3}{12} + 1,5^2 \cdot 20 \right) + \left(\frac{6 \cdot 2^3}{12} + (-2,5)^2 \cdot 12 \right) = 211,67 + 79,00$$

$$I_{y_c} = \mathbf{290,67 \text{ [mm}^4\text{]}}$$

$$I_{z_c} = \left(\frac{10 \cdot 2^3}{12} + (-1,5)^2 \cdot 20 \right) + \left(\frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2,5^2 \cdot 12 \right) = 51,67 + 111,00$$

$$I_{z_c} = \mathbf{162,67 \text{ [mm}^4\text{]}}$$

$$I_{y_c z_c} = [0 + 1,5 \cdot (-1,5) \cdot 20] + [0 + (-2,5) \cdot 2,5 \cdot 12] = -45,00 - 75,00$$

$$I_{y_c z_c} = \mathbf{-120,00 \text{ [mm}^4\text{]}}$$

4. Określenie głównych momentów bezwładności

$$\left. \begin{matrix} I_{max} \\ I_{min} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2} \right)^2 + I_{y_c z_c}^2}$$

$$\left. \begin{matrix} I_{max} \\ I_{min} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \frac{290,67 + 162,67}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{290,67 - 162,67}{2}\right)^2 + (-120,00)^2}$$

$$\left. \begin{matrix} I_{max} \\ I_{min} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = 226,67 \pm 136,00$$

$$I_{max} = I_1 = 362,67 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$I_{min} = I_2 = 90,67 \text{ [mm}^4\text{]}$$

5. Określenie kierunków głównych momentów bezwładności

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{y_c z_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2I_{y_c z_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2(-120,00)}{290,67 - 162,67} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1,875) \Rightarrow \alpha \approx 31^\circ$$

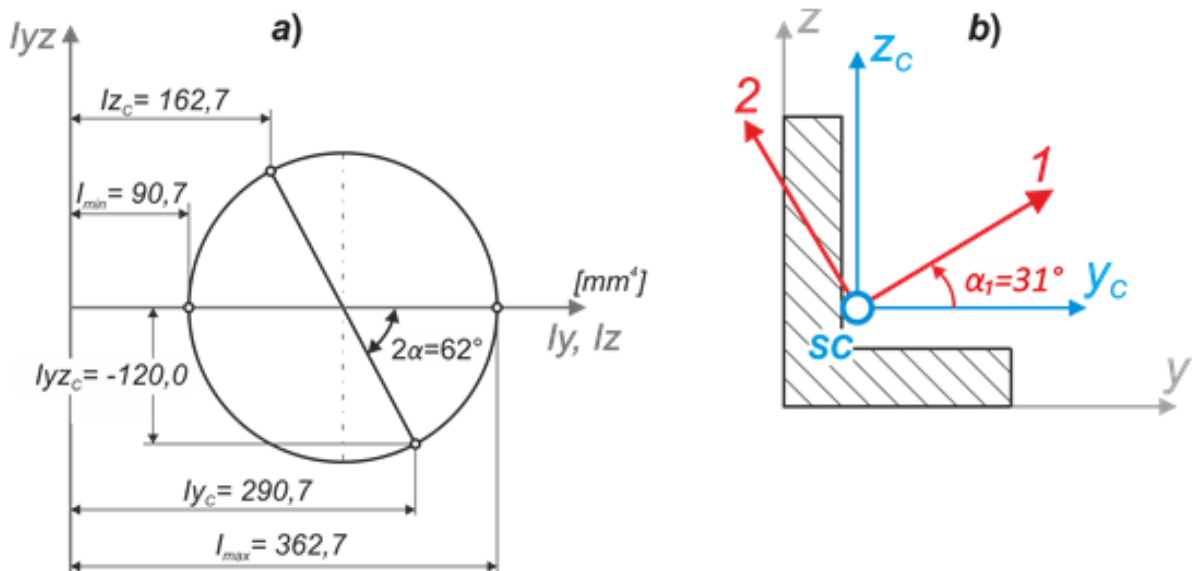
Kąt, o jaki należałoby obrócić oś Y_{sc} , aby pokryła się z osią 1 względem, której moment bezwładności figury ma największą wartość wynosi:

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \frac{I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_1} \Rightarrow \alpha_{max} = \alpha_1 \approx 31^\circ$$

Kąt o jaki należałoby obrócić oś Y_{sc} , aby pokryła się z osią 2 względem, której moment bezwładności figury ma najmniejszą wartość wynosi:

$$\operatorname{tg} \alpha_{min} = \frac{I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_2} \Rightarrow \alpha_{min} = \alpha_2 \approx -59^\circ$$

6. Wykreślenie koła Mohra

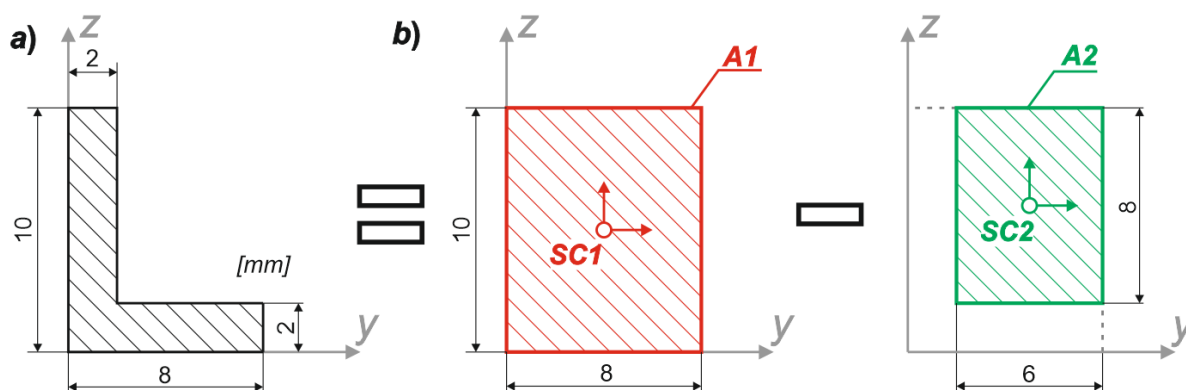


Rys. 3.4.2

3.5. Alternatywny sposób rozwiązania zadania 3.4

Ponieważ wynik obliczeń nie zależy od sposobu podziału figury złożonej na prostsze elementy, identyczny wynik zadania 3.4. uzyskamy stosując podział z rysunku 3.5b.

Różnice w rachunkach ograniczą się jedynie do sposobu wyznaczenia współrzędnych środka ciężkości figury oraz momentów bezwładności względem osi centralnych. Dalsze obliczenia pozostają identyczne w stosunku do przykładu 3.4.



Rys.3.5

Współrzędnych środka ciężkości figury złożonej:

$$y_{sc} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{4 \cdot 80 - 5 \cdot 48}{80 - 48} = 2,5 \text{ [mm]}$$

$$z_{sc} = \frac{z_1 A_1 - z_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{5 \cdot 80 - 6 \cdot 48}{80 - 48} = 3,5 \text{ [mm]}$$

Momenty bezwładności względem osi centralnych:

$$I_{y_c} = \left[\frac{8 \cdot 10^3}{12} + (5 - 3,5)^2 \cdot 80 \right] - \left[\frac{6 \cdot 8^3}{12} + (6 - 3,5)^2 \cdot 48 \right] = 846,67 - 556,00$$

$$I_{y_c} = 290,67 \text{ [mm}^4\text{]}$$

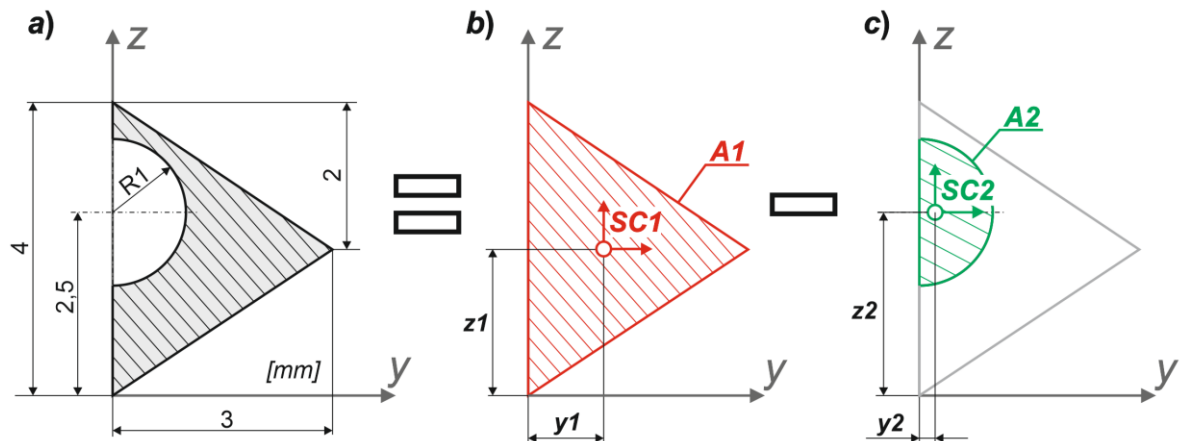
$$I_{z_c} = \left[\frac{10 \cdot 8^3}{12} + (4 - 2,5)^2 \cdot 80 \right] - \left[\frac{8 \cdot 6^3}{12} + (5 - 2,5)^2 \cdot 48 \right] = 606,67 - 444,0$$

$$I_{z_c} = 162,67 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$I_{y_c z_c} = [0 + (5 - 3,5) \cdot (4 - 2,5) \cdot 80] - [0 + (6 - 3,5) \cdot (5 - 2,5) \cdot 48]$$

$$I_{y_c z_c} = -120,00 \text{ [mm}^4\text{]}$$

3.6. Wyznaczyć główne momenty bezwładności figury przedstawionej na rysunku 3.6.1a.



Rys.3.6.1

1. Podział na figury proste

$$y_1 = 1 \text{ [mm]}$$

$$z_1 = 2 \text{ [mm]}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ [mm}^2\text{]}$$

$$y_2 = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} = 0,424 \text{ [mm]}$$

$$z_2 = 2,5 \text{ [mm]}$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 1,571 \text{ [mm}^2\text{]}$$

2. Wyznaczenie współrzędnych środka ciężkości figury złożonej

$$y_{sc} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{1 \cdot 6 - 0,424 \cdot 1,571}{6 - 1,571} = 1,204 \text{ [mm]}$$

$$z_{sc} = \frac{z_1 A_1 - z_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{2 \cdot 6 - 2,5 \cdot 1,571}{6 - 1,571} = 1,823 \text{ [mm]}$$

3. Momenty bezwładności względem osi centralnych

$$a_1 = z_1 - z_{sc} = 2 - 1,82 = 0,177 \text{ [mm]}$$

$$b_1 = y_1 - y_{sc} = 1 - 1,20 = -0,204 \text{ [mm]}$$

$$a_2 = z_2 - z_{sc} = 2,5 - 1,82 = 0,677 \text{ [mm]}$$

$$b_2 = y_2 - y_{sc} = 0,424 - 1,20 = -0,780 \text{ [mm]}$$

$$I_{y_c} = \left[\frac{3 \cdot 4^3}{48} + 0,177^2 \cdot 6 \right] - \left[\frac{\pi \cdot 1^4}{8} + 0,677^2 \cdot 1,571 \right] = 4,189 - 1,113$$

$$I_{y_c} = 3,075 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$I_{z_c} = \left[\frac{4 \cdot 3^3}{36} + (-0,204)^2 \cdot 6 \right] - [0,11 \cdot 1^4 + (-0,780)^2 \cdot 1,571] = 3,250 - 1,065$$

$$I_{z_c} = 2,185 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$I_{y_c z_c} = [0 + 0,177 \cdot (-0,204) \cdot 6] - [0 + 0,677 \cdot (-0,780) \cdot 1,571] = \\ = -0,217 - (-0,830)$$

$$I_{y_c z_c} = 0,612 \text{ [mm}^4\text{]}$$

4. Określenie głównych momentów bezwładności:

$$\left. \begin{matrix} I_{max} \\ I_{min} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \frac{3,075 + 2,185}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,075 - 2,185}{2} \right)^2 + (0,612)^2} = 2,630 \pm 0,757$$

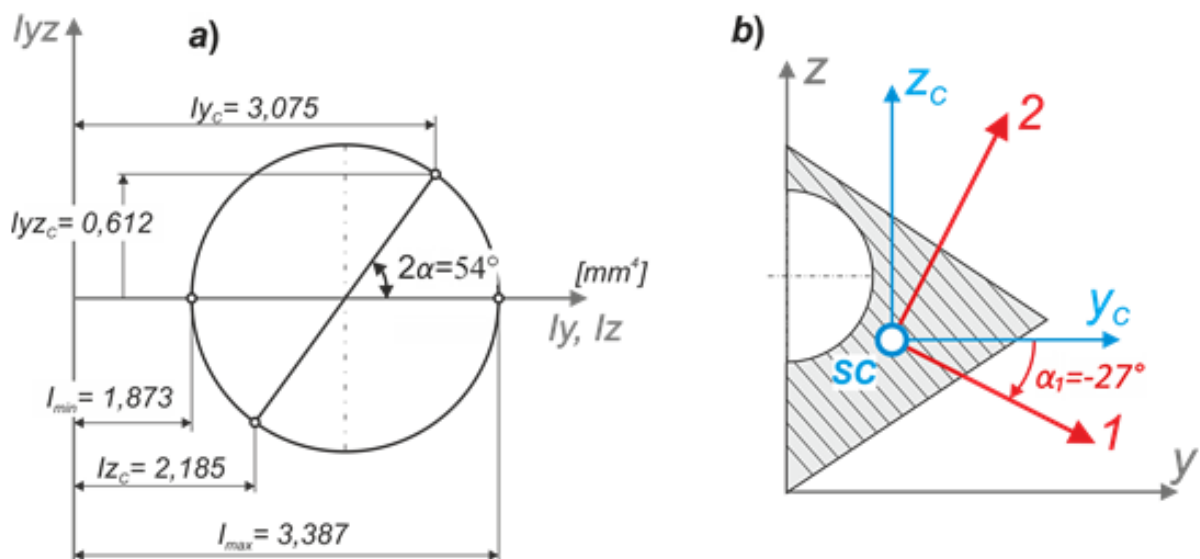
$$I_{max} = I_1 = 3,387 \text{ [mm}^4\text{]}, \quad I_{min} = I_2 = 1,873 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-2 \cdot 0,612}{3,075 - 2,185} \right) = \frac{1}{2} \arctg(-1,375) \Rightarrow \alpha \approx -27^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \frac{I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_1} \Rightarrow \alpha_{max} = \alpha_1 \approx -27^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{min} = \frac{I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_2} \Rightarrow \alpha_{min} = \alpha_2 \approx 63^\circ$$

5. Koło Mohra



Rys. 3.6.2

LITERATURA

1. Bodnar A.: *Wytrzymałość materiałów : podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej , 2004
2. Brzoska Z.: *Wytrzymałość Materiałów*, PWN, 1972
3. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: *Wytrzymałość Materiałów*, PWN 2013
4. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: *Zadania z wytrzymałości materiałów*, PWN 2013