Politechnika Rzeszowska
**Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa**

Katedra Inżynierii Lotniczej i Kosmicznej

WERSJA ROBOCZA

Pomoce dydaktyczne

z przedmiotu:

**Metoda Elementów Skończonych**

# ***Ramy wewnętrznie statycznie wyznaczalne***

*Wersja robocza dokumentu*

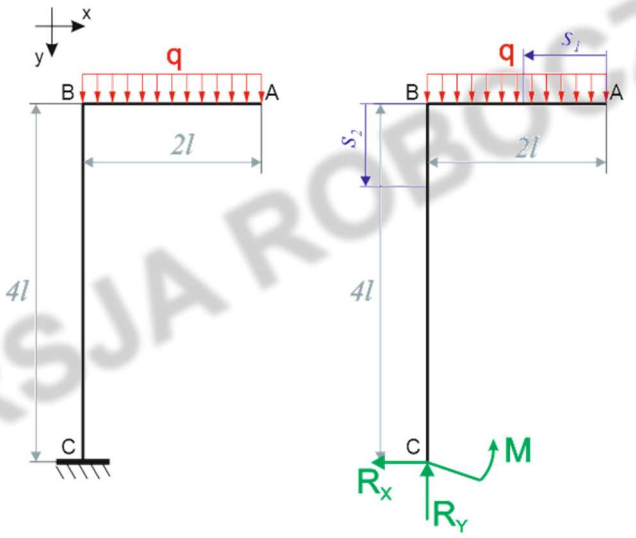
*Ewentualne uwagi, sugestie lub wykryte błędy w tekście proszę kierować na adres: lukasz.swiech@prz.edu.pl*

**Łukasz Święch**

*Rzeszów, 2022*

## Zadanie 1

Wyznaczyć rozkłady Mg, T i N w ramie przedstawionej na rysunku




Rys.1. Rama i schemat statycznie równoważny wykorzystany do obliczeń

Równania równowagi statycznej:

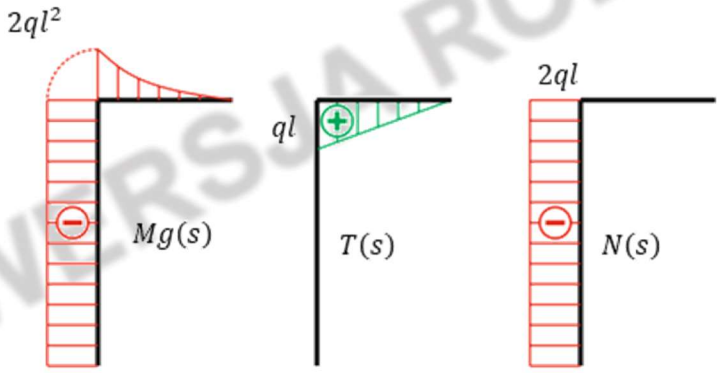
$$\Sigma P_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_x = 0$$
$$\Sigma P_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_y = 2ql$$
$$\Sigma M_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -q \cdot 2l \cdot l + M = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 2ql^2$$

Rozwiązanie dla poszczególnych belek ramy:

$$Mg(s_1) = -q \cdot s_1 \cdot \frac{1}{2} s_1 = -\frac{1}{2} q {s_1}^2$$
$$N(s_1) = 0$$
$$T(s_1) = q \cdot s_1$$

$$Mg(s_2) = -\frac{1}{2} ql^2$$
$$N(s_2) = 2ql$$
$$T(s_2) = 0$$

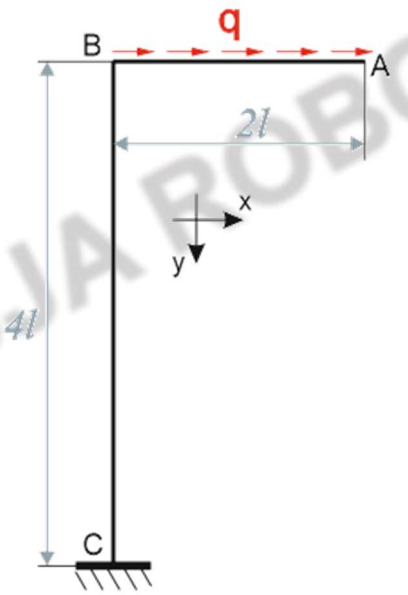
Wykres momentu gnącego, siły tnącej i siły normalnej wzdłuż elementów ramy:




WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA

## Zadanie 1.2

Wyznaczyć rozkłady Mg, T i N w ramie przedstawionej na rysunku




Równania równowagi statycznej:

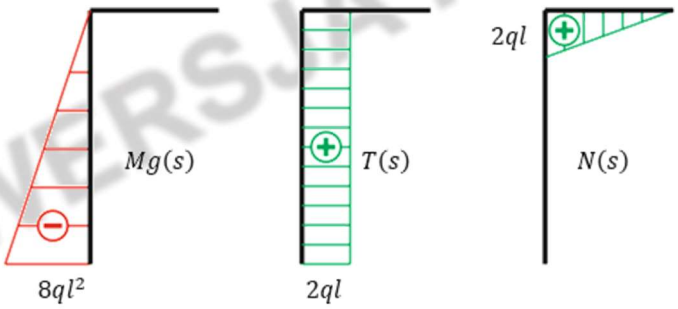
$$\Sigma P_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_x = 2ql$$
$$\Sigma P_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_y = 0$$
$$\Sigma M_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -q \cdot 2l \cdot 4l + M = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 8ql^2$$

Rozwiązanie dla poszczególnych belek ramy:

$$Mg(s_1) = 0$$
$$N(s_1) = q \cdot s_1$$
$$T(s_1) = 0$$

$$Mg(s_2) = -2ql \cdot s_2$$
$$N(s_2) = 2ql$$
$$T(s_2) = 0$$

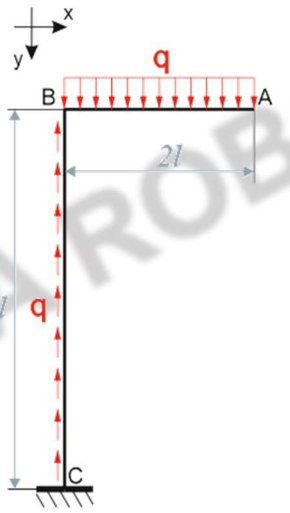
Wykres momentu gnącego, siły tnącej i siły normalnej wzdłuż elementów ramy:




WERSJA ROBOCZA

## Zadanie 1.3

Wyznaczyć rozkłady Mg, T i N w ramie przedstawionej na rysunku



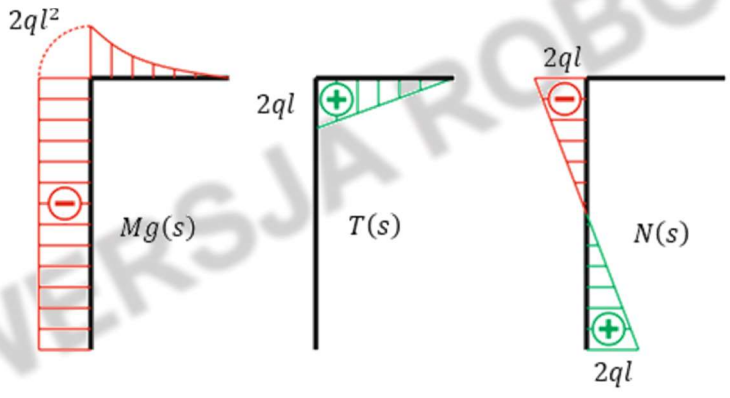

Równania równowagi statycznej:

$$\boldsymbol{\Sigma P_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_x = 0}$$
$$\boldsymbol{\Sigma P_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -R_y - q \cdot 4l + q \cdot 2l = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 2ql}$$
$$\boldsymbol{\Sigma M_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -q \cdot 2l \cdot l + M = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 2ql^2}$$

Funkcje momentu gnącego, siły tnącej i siły normalnej wzdłuż poszczególnych przedziałów obliczeniowych:

$$\boldsymbol{Mg(s_1) = -\frac{1}{2} q {s_1}^2}$$
$$\boldsymbol{N(s_1) = 0}$$
$$\boldsymbol{T(s_1) = q \cdot s_1}$$
$$\boldsymbol{Mg(s_2) = -\frac{1}{2} q l^2}$$
$$\boldsymbol{N(s_2) = -2ql + q \cdot s_2}$$
$$\boldsymbol{T(s_2) = 0}$$

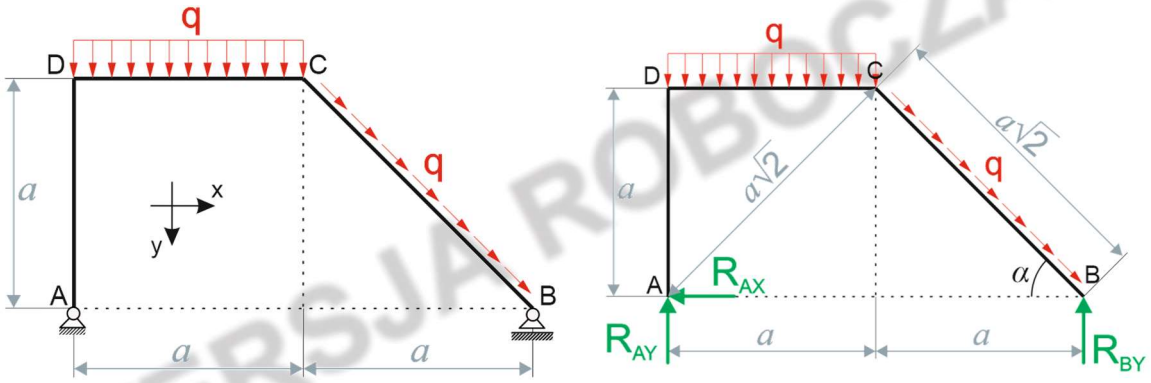
Wykres momentu gnącego, siły tnącej i siły normalnej wzdłuż elementów ramy:




WERSJA ROBOCZA

## Zadanie 2

Wyznaczyć rozkłady Mg, T i N w ramie przedstawionej na rysunku




Rys. Rama i schemat statycznie równoważny wykorzystany do obliczeń

Równania równowagi statycznej:

$$\boldsymbol{\Sigma P_x = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{-R_{AX} + q \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos\alpha = 0} \qquad \boldsymbol{(2.1)}$$

$$\boldsymbol{\Sigma P_y = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{-R_{AY} - R_{BY} + q \cdot a + q \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin\alpha = 0} \qquad \boldsymbol{(2.2)}$$

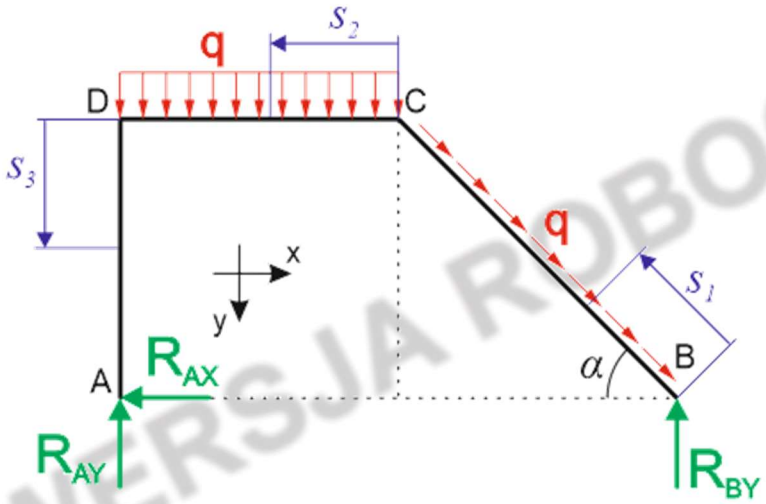
$$\boldsymbol{\Sigma M_B = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{-R_{AY} \cdot 2a + (q \cdot a) \cdot \frac{3}{2}a = 0} \qquad \boldsymbol{(2.3)}$$

Z równań otrzymamy:

$$\boldsymbol{R_{AX} = qa; \quad R_{AY} = \frac{3}{4}qa; \quad R_{BY} = \frac{5}{4}qa}$$

Sprawdzenie:

$$\boldsymbol{\Sigma M_A = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{-(q \cdot a) \cdot \frac{1}{2}a - \left(q \cdot a\sqrt{2}\right) \cdot a\sqrt{2} + R_{BY} \cdot 2a = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{0 = 0}$$




Rys. Podział ramy na przedziały obliczeniowe

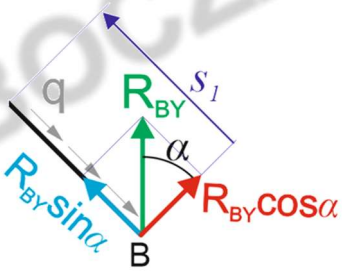
WERSJA ROBOCZA

Funkcje momentu gnącego, siły tnącej i siły normalnej wzdłuż poszczególnych przedziałów obliczeniowych:

$s_1 \in (0, a\sqrt{2})$

$$Mg(s_1) = R_{BY} \cdot \cos\alpha \cdot s_1 = \frac{5}{4}qa \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s_1$$

$$Mg(s_1) = \frac{5\sqrt{2}}{8}qas_1$$




$$T(s_1) = -R_{BY} \cdot \cos\alpha$$

$$T(s_1) = \frac{5\sqrt{2}}{8}qa$$

$$N(s_1) = -R_{BY} \cdot \sin\alpha + q \cdot s_1$$

$$N(s_1) = -\frac{5\sqrt{2}}{8}qa + q \cdot s_1$$

$s_2 \in (0, a)$

$$Mg(s_2) = R_{BY} \cdot (a + s_2) - q \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin\alpha \cdot s_2 - q \cdot s_2 \cdot \frac{1}{2}s_2$$

$$Mg(s_2) = \frac{5}{4}qa \cdot (a + s_2) - qa \cdot s_2 - \frac{1}{2}q \cdot {s_2}^2$$

$$T(s_2) = -R_{BY} + q \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin\alpha + q \cdot s_2$$

$$T(s_2) = -\frac{5}{4}qa + q \cdot a + q \cdot s_2$$

$$T(s_2) = -\frac{1}{4}qa + q \cdot s_2$$

$$N(s_2) = q \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos\alpha = qa$$

$s_3 \in (0, a)$

$$Mg(s_3) = R_{BY} \cdot 2a - q \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin\alpha \cdot a - q \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos\alpha \cdot s_3 - \frac{1}{2}qa^2$$

$$Mg(s_3) = \frac{5}{2}qa^2 - qa^2 - qa \cdot s_3 - \frac{1}{2}qa^2$$

$$Mg(s_3) = qa^2 - qa \cdot s_3$$

$$T(s_3) = q \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$$

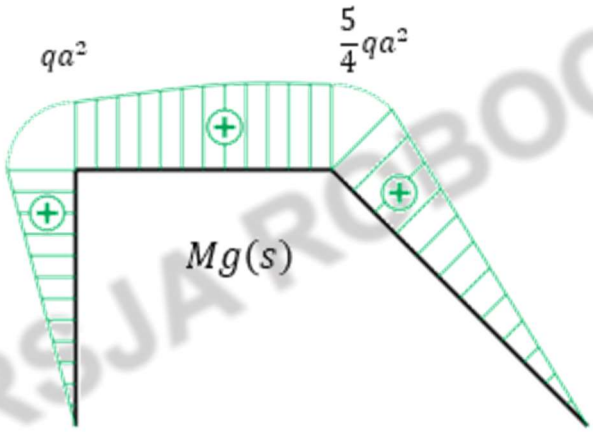
$$T(s_3) = qa$$

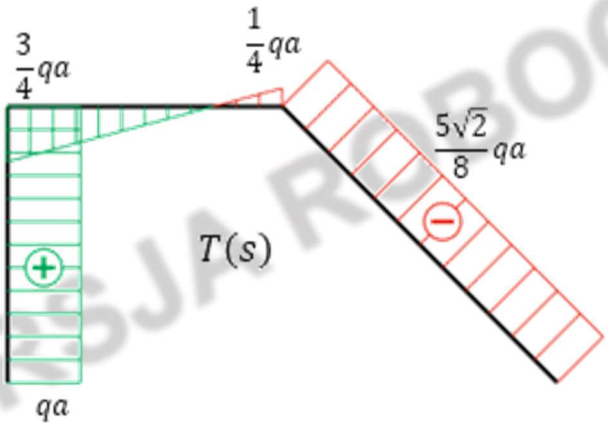
$$N(s_3) = R_{BY} - q \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin\alpha \cdot a - qa$$

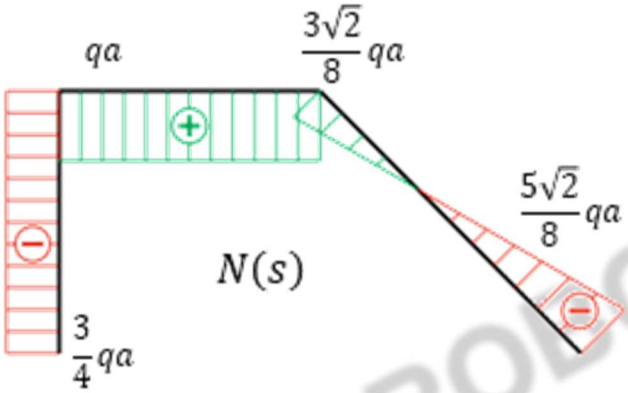
$$N(s_3) = \frac{5}{4}qa - \frac{8}{4}qa = -\frac{3}{4}qa$$

WERSJA ROBOCZA

Wykres momentu gnącego, siły tnącej i siły normalnej wzdłuż elementów ramy:



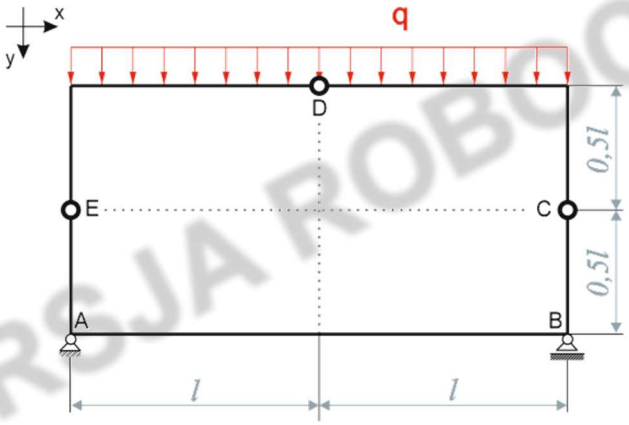



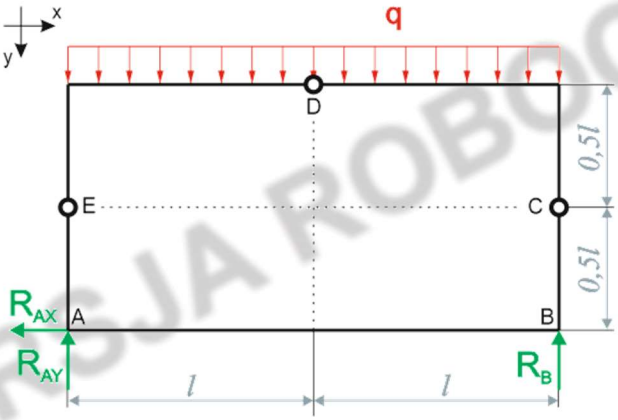

WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA

## Zadanie 3

Wyznaczyć rozkłady Mg, T i N w ramie przedstawionej na rysunku




Rama z trzema przegubami jest zagadnieniem wewnętrznie statycznie wyznaczalnym




Równania równowagi statycznej dla całego układu:

$$\Sigma M_A = 0 \qquad R_B \cdot 2l - q \cdot 2l \cdot l = 0$$

$$R_B = ql$$

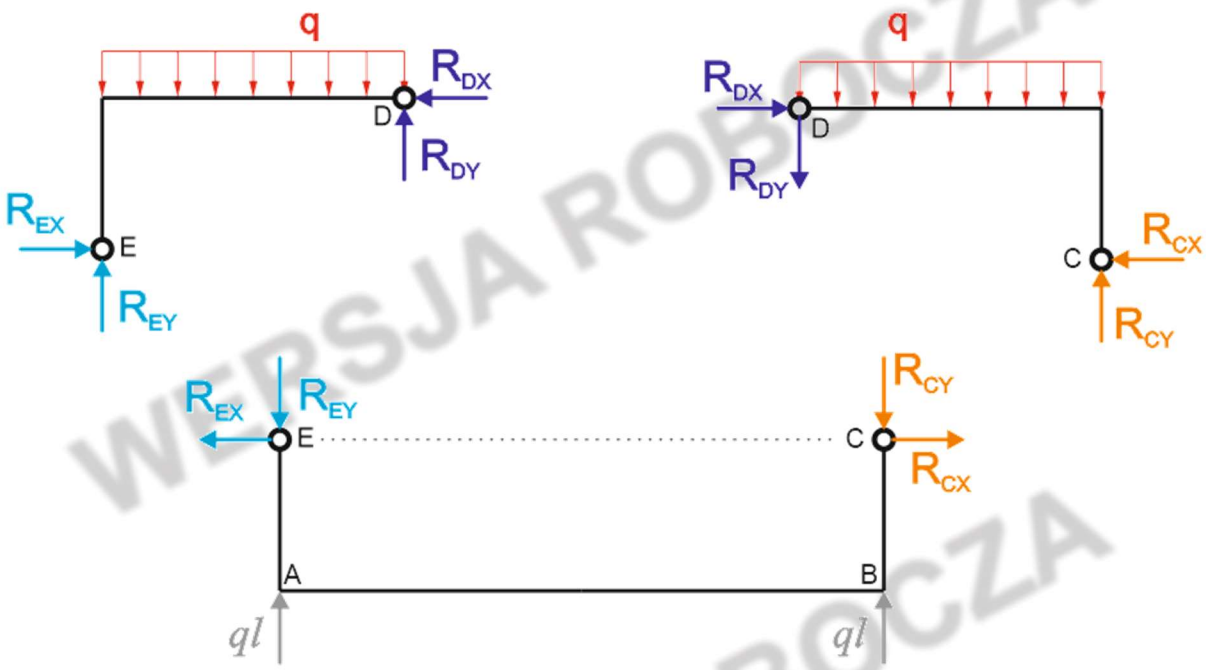
$$\Sigma M_B = 0 \qquad -R_{AY} \cdot 2l + q \cdot 2l \cdot l = 0$$

$$R_{AY} = ql$$

$$\Sigma P_X = 0 \qquad R_{AX} = 0$$

WERSJA ROBOCZA

Podział ramy na trzy statycznie wyznaczalne części:



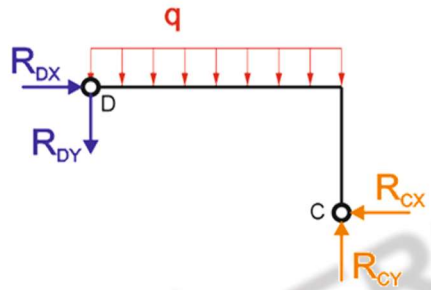

Równania równowagi statycznej dla poszczególnych części ramy:




$$\Sigma P_X = 0 \qquad R_{EX} = R_{CX}$$

$$\Sigma P_Y = 0 \qquad -q \cdot l - q \cdot l + R_{EY} + R_{CY} = 0$$

$$\Sigma M_E = 0 \qquad ql \cdot 2l - R_{CY} \cdot 2l = 0$$

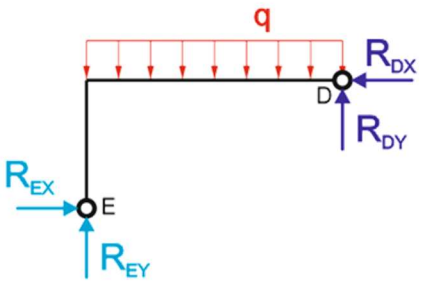



$$\Sigma P_X = 0 \qquad R_{DX} = R_{CX}$$

$$\Sigma P_Y = 0 \qquad R_{DY} - R_{CY} + q \cdot l = 0$$

$$\Sigma M_D = 0 \qquad -R_{CX} \cdot \frac{1}{2} l + R_{CY} \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = 0$$

WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA

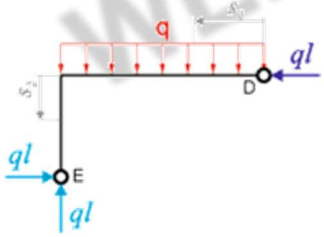



$$\Sigma P_X = 0 \qquad R_{DX} = R_{EX}$$

$$\Sigma P_Y = 0 \qquad -R_{EY} - R_{DY} + q \cdot l = 0$$

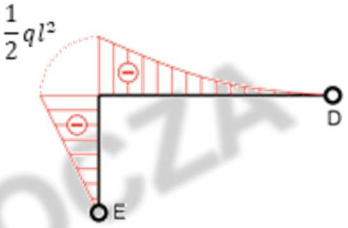
$$\Sigma M_D = 0 \qquad -R_{EY} \cdot l + R_{EX} \cdot \frac{1}{2} l + q \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = 0$$

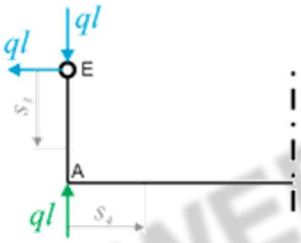
Funkcje opisujące zmianę momentów gnących w poszczególnych elementach ramy:




$$Mg(s_1) = -\frac{1}{2} q s_1^2$$

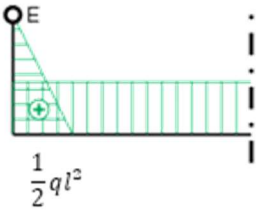
$$Mg(s_2) = -\frac{1}{2} q l^2 + ql \cdot s_2$$



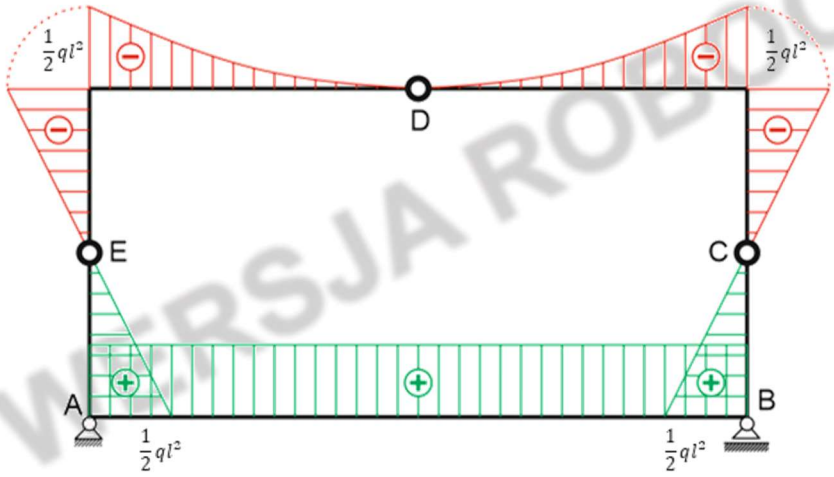




$$Mg(s_3) = ql \cdot s_3$$

$$Mg(s_4) = \frac{1}{2} q l^2 + ql \cdot s_4 - ql \cdot s_4 = \frac{1}{2} q l^2$$




Wykres momentu gnącego wzdłuż obwodu ramy:




WERSJA ROBOCZA

## LITERATURA

1. Brzoska Z.: Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych, PWN, 1969
2. Bodnar A.: *Wytrzymałość materiałów : podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej , 2004*
3. Brzoska Z.: *Wytrzymałość Materiałów*, PWN, 1972
4. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: *Wytrzymałość Materiałów*, PWN 2013
5. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: *Zadania z wytrzymałości materiałów,* PWN 2013