



**POLITECHNIKA
RZESZOWSKA**
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA



**WYDZIAŁ
BUDOWY MASZYN
I LOTNICTWA**
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Politechnika Rzeszowska
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa

Katedra Inżynierii Lotniczej i Kosmicznej

Pomoce dydaktyczne

z przedmiotu:

Metoda Elementów Skończonych

**Wykorzystanie MES do analizy prętów
pryzmatycznych**

Wersja robocza dokumentu

Ewentualne uwagi, sugestie lub wykryte błędy w tekście proszę kierować na

adres: lukasz.swiech@prz.edu.pl

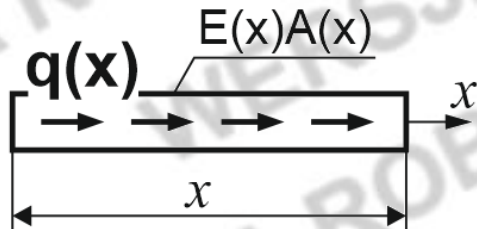
Łukasz Święch

Rzeszów, 2022

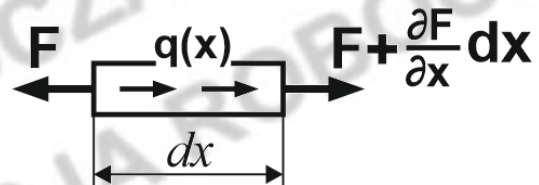
JA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA
WERSJA ROBOCZA

Podstawy teoretyczne

W celu wyznaczenia ogólnej zależności pomiędzy obciążeniem, a deformacją weźmy pod rozwagę pręt (rys. 1) o polu przekroju $A(x)$ i module Younga materiału $E(x)$, na który na całej długości działa obciążenie ciągłe $q(x)$.



Rys.1. Rozpatrywany pręt



Rys.2. Jednostkowy wycinek pręta

Dla dowolnego wycinka pręta o długości dx (rys.2), można napisać równie równowagi statycznej w postaci:

$$F = qdx + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx \Rightarrow qdx + \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0$$

co po scałkowaniu daje:

$$q + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Pamiętając, że siłę i naprężenie łączy zależność:

$$F = A\sigma_x$$

Zakładając dodatkowo liniowe prawo fizyczne w postaci:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \Rightarrow \sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

Otrzymamy:

$$F = EA\varepsilon_x \Rightarrow F = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

Po wstawieniu do równania równowagi (1) prowadzi do sformułowania różniczkowej zależności łączącej obciążenie i deformację:

$$q + \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

Dla tak postawionego problemu można przyjąć warunki brzegowe w postaci:

Dla lewego końca belki:

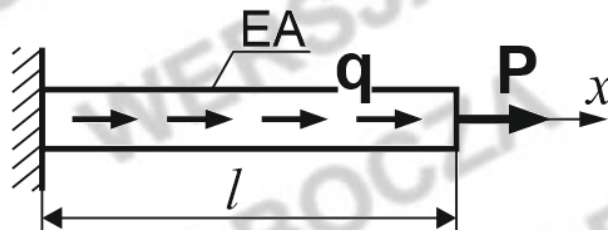
$$u(x_0) = u_0 \quad \text{oraz} \quad -E(x_0)A(x_0) \frac{du(x_0)}{dx} = P_0$$

Dla prawego końca belki:

$$u(x_l) = u_1 \quad \text{oraz} \quad E(x_l)A(x_l) \frac{du(x_l)}{dx} = P_1$$

Przykład bezpośredniego wykorzystania równania różniczkowego (2) do analizy pręta pryzmatycznego - tzw. rozwiązanie ścisłe

Zadaniem jest wyznaczenie funkcji $u = u(x)$ opisującej przemieszczenia pręta o sztywności na rozciąganie EA i długości L , który jest utwierdzony z lewej strony, z prawej zaś obciążony siłą skupioną o wartości P . Dodatkowo na całej długości pręta działa stały wydatek o stałej wartości q .



Rys. 3.

Równanie równowagi pręta (2) przyjmuje postać:

$$EA \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q = 0, \quad 0 < x < L$$

Warunki brzegowe prowadzą do stwierdzenia, że:

$$u(0) = 0, \quad EA \cdot \frac{du(L)}{dx} = P$$

Całkując podwójnie równanie równowagi (3) otrzymujemy kolejno:

$$EA \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q = 0$$

$$EA \cdot \frac{du}{dx} + qx = C_1$$

$$EA \cdot u(x) + \frac{qx^2}{2} = C_1x + C_2$$

Uwzględnienie warunki brzegowych umożliwia określenie stałych całkowania:

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$EA \cdot \frac{du(L)}{dx} = P \quad \Rightarrow \quad C_1 = P + qL$$

Ostatecznie rozwiązanie ściśle przyjmie postać:

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(-\frac{qx^2}{2} + qLx + Px \right)$$

Powyższa funkcja umożliwia znalezienie przemieszczenia w dowolnym punkcie x wzdłuż długości rozpatrywanego pręta.

Rozwiązanie przybliżone na przykładzie zastosowania metody Rayleigha-Ritza

Metoda, w zagadnieniach mechaniki ciała stałego, oparta jest o zasadę minimum energii potencjalnej układu.

Energia odkształcenia sprężystego w pręcie rozciąganym:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (3)$$

gdzie V -objętość pręta.

Zakładając, że w zagadnieniu naprężenie i odkształcenie jest stałe w przekroju, energię sprężystą wyrazić można jako:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_l} \sigma_x \varepsilon_x A dx$$

Wykorzystując prawo Hooke'a:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ostatecznie energia sprężysta zgromadzona w pręcie wynosi:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_l} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Energia potencjalna obciążenia równa jest pracy sił zewnętrznych na wywołanych przez nie przemieszczeniach:

$$W = \int_{x_0}^{x_l} qu dx + \sum P_i u(x_i)$$

gdzie $u(x_i)$ jest przemieszczeniem w miejscu przyłożenia siły P_i . Znak sumy oznacza, że należy uwzględnić tyle składników, ile przyłożonych jest sił skupionych.

Energia potencjalna pręta poddanego działaniu sił osiowych wynosi zatem:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_l} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \int_{x_0}^{x_l} qu dx - \sum P_i u(x_i)$$

Przykład rozwiązania zagadnienia pręta z wykorzystaniem liniowej funkcji rozwiązującej

Energia potencjalna pręta przedstawionego na rys. 3:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - q \int_0^L u dx - P u(L)$$

Zakładamy rozwiązanie w postaci funkcji liniowej:

$$u(x) = a_1 x + a_0$$

Rozwiązanie musi spełniać warunek brzegowy, tj. przemieszczenie w punkcie utwierdzenia musi być równe zero:

$$u(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

stąd funkcja rozwiązująca przyjmie postać:

$$u(x) = a_1 x$$

Wstawiając powyższe do wyrażenia na energię potencjalną układu:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA a_1^2 dx - q a_1 \int_0^L x dx - P a_1 L$$

$$\Pi = \frac{1}{2} EA a_1^2 L - q a_1 \frac{L^2}{2} - P a_1 L$$

W celu znalezienia minimum energii potencjalnej przyrównujemy pochodną cząstkową Π do zera:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \Leftrightarrow EA a_1 L - q \frac{L^2}{2} - P L = 0$$

stąd współczynnik a_1 wynosi:

$$a_1 = \frac{\frac{qL}{2} + P}{EA}$$

Podstawiając tę wartość do założonej postaci rozwiązania otrzymamy:

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(\frac{qL}{2} x + P x \right)$$

Porównując powyższy wynik z rozwiązaniem ścisłym można zauważyć, że przyjęcie liniowej funkcji rozwiązującej równanie różniczkowe nie zapewnia uzyskania poprawnego rozkładu przemieszczenia wzdłuż długości rozważanego pręta.

Zaznaczyć jednak należy, że takie rozwiązanie przybliżone spełnia przemieszczeniowe warunki brzegowe.

Przykład rozwiązania zagadnienia pręta z wykorzystaniem kwadratowej funkcji rozwiązującej

Energia potencjalna pręta przedstawionego na rys. 3:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - q \int_0^L u dx - P u(L)$$

Zakładamy rozwiązanie w postaci funkcji kwadratowej:

$$u(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Rozwiązanie musi spełniać warunek:

$$u(0) = 0 \text{ stąd } a_0 = 0$$

stąd funkcja rozwiązująca przyjmie postać:

$$u(x) = a_2 x^2 + a_1 x$$

Wstawiając powyższe do wyrażenia na energię potencjalną układu:

$$\Pi = -\frac{1}{3} q a_2 L^3 - \frac{1}{2} q a_1 L^2 + \frac{2}{3} E A a_2^2 L^3 + E A a_1 a_2 L^2 - P a_2 L^2 + \frac{1}{2} E A a_1^2 L - P a_1$$

W celu znalezienia minimum energii potencjalnej przyrównujemy pochodne cząstkowe Π do zera:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{qL + P}{EA} \quad \text{i} \quad a_2 = -\frac{1}{2} \frac{q}{EA}$$

W wyniku obliczeń otrzymuje się zatem funkcje przemieszczeń tożsamą z rozwiązaniem ścisłym:

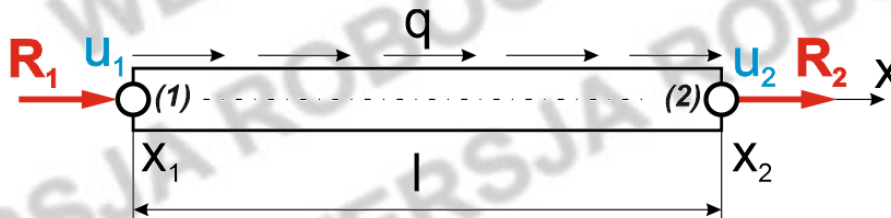
$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(-\frac{qx^2}{2} + qLx + Px \right)$$

W rozpatrywanym przypadku zastosowanie funkcji rozwiązującej wyższego stopnia nie wpłynie na dokładność rozwiązania.

Rozwiązanie przybliżone z zastosowaniem MES

Definicja dwuwęzłowego elementu prętowego

Rozpatrywany jest element prętowy, którego węzły pierwszy i drugi mają odpowiednio współrzędne x_1 i x_2 . Długość elementu wyrażona jest przez zależność $l = x_2 - x_1$. Element posiada pole przekroju poprzecznego o wielkości A i zbudowany jest z materiału o module Younga E . Poszukiwane są przemieszczenia węzłów, tj. u_1 i u_2 .



Rys. 4.

Równanie różniczkowe elementu:

$$\frac{d}{dx} \left(EA \cdot \frac{du}{dx} \right) + q = 0 \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

Obciążenie R_1 i R_2 w węzłach prowadzi do sformułowania naturalnych warunków brzegowych:

$$-EA \cdot \frac{du(x_1)}{dx} = R_1 \quad \text{oraz} \quad EA \cdot \frac{du(x_2)}{dx} = R_2$$

Podstawowa niewiadoma to przemieszczenie osiowe $u(x)$. Po znalezieniu tej wartości można policzyć odkształcenie, naprężenie i siłę w elemencie:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \sigma_x = E \varepsilon_x, \quad N = A \sigma_x$$

Do opisu pola przemieszczeń stosuje się metody interpolacyjne. Przykładowo wykorzystując wielomiany Lagrange'a otrzymamy element, w którym przemieszczenie pomiędzy węzłami zmieniać się będą w sposób liniowy:

$$u(x) = \begin{pmatrix} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} & \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow u(x) = (N_1 \ N_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

W zapisie macierzowym: $u(x) \equiv \mathbf{N}^T \mathbf{d}$,

gdzie:

$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$ - macierz kolumnowa (wektor) funkcji kształtu,

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ - wektor przemieszczeń węzłowych.

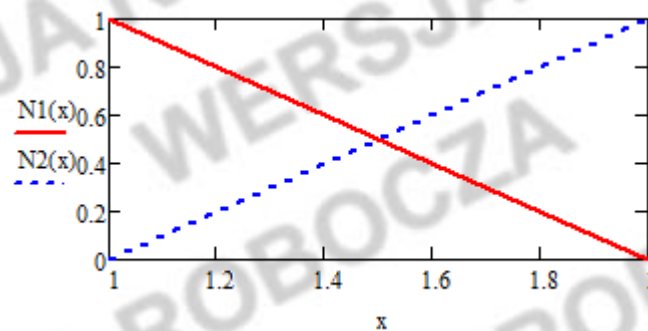
Symbole zapisane **pogrubioną** czcionką oznaczają macierz lub wektor.

Zadaniem **funkcji kształtu** jest umożliwienie wyznaczenia wartości przemieszczenia $u(x)$ przy znajomości jedynie przemieszczeń węzłowych u_1 i u_2 .

W przyjętej interpolacji wielomianem Lagrange'a funkcje kształtu N_1 i N_2 wynoszą:

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x - x_2}{l}, \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{l}$$

Na rysunku 5 przedstawiono przebiegi funkcji kształtu wzdłuż długości elementu o współrzędnych węzłów $x_1 = 1$, $x_2 = 2$:



Rys. 5.

W toku kolejnych obliczeń niezbędna jest również pochodna przemieszczenia będąca jednocześnie odkształceniem:

$$u'(x) = \frac{du(x)}{dx} \Rightarrow u'(x) = \left(\frac{1}{x_1 - x_2} \quad \frac{1}{x_2 - x_1} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow u'(x) = (N'_1 \ N'_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

W zapisie macierzowym:

$$u'(x) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \varepsilon_x = \mathbf{B}^T \mathbf{d}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{pmatrix}$$

Pochodne funkcji kształtu mają postać:

$$N'_1 = \frac{1}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{l}, \quad N'_2 = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{l}$$

Energia potencjalna zgromadzona w elemencie jest różnicą energii odkształcenia sprężystego i pracy sił zewnętrznych:

$$\Pi = U - W$$

W elemencie obciążonym na całej swojej długości wydatkiem q i siłami węzłowymi R_1 w węźle pierwszym i R_2 w węźle drugim, energia ta ma postać:

$$\Pi = U - W = \left\{ \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} - \left\{ \int_{x_1}^{x_2} qu dx + R_1 u_1 + R_2 u_2 \right\}$$

Energia odkształcenia (en. sprężysta) wyrażona może być jako:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

co w zapisie macierzowym, po uwzględnieniu informacji zawartej w uzupełnieniu 1 ze strony 13 prowadzi do:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EA \mathbf{d}^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{d} dx \Rightarrow U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{x_1}^{x_2} EA \mathbf{B} \mathbf{B}^T dx \mathbf{d}$$

po wprowadzeniu pojęcia macierzy sztywności \mathbf{k} otrzymamy wyrażenie:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d}$$

Macierz sztywności elementu \mathbf{k} opisuje zależność:

$$\mathbf{k} = \int_{x_1}^{x_2} EA \mathbf{B} \mathbf{B}^T dx$$

Pamiętając, że \mathbf{B} jest wektorem pochodnych funkcji kształtu w postaci:

$$\mathbf{B}^T = (N'_1 \ N'_2) = \left(-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right)$$

Macierz sztywności elementu obliczymy jako:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} EA \frac{1}{l^2} dx & - \int_{x_1}^{x_2} EA \frac{1}{l^2} dx \\ - \int_{x_1}^{x_2} EA \frac{1}{l^2} dx & \int_{x_1}^{x_2} EA \frac{1}{l^2} dx \end{pmatrix}$$

co po scałkowaniu daje :

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Praca sił zewnętrznych na wywołanych przez nie przemieszczeniach czyli energia potencjalna obciążenia składa się z dwóch członów:

$$W = W_q + W_p$$

- Praca wykonana przez wydatek q działający na długości elementu:

$$W_q = \int_{x_1}^{x_2} qu \, dx$$

W zapisie macierzowym:

$$W_q = \int_{x_1}^{x_2} q \mathbf{N}^T \mathbf{d} \, dx \Rightarrow W_q = \mathbf{r}_q^T \mathbf{d} \equiv \mathbf{d}^T \mathbf{r}_q$$

gdzie:

$$\mathbf{r}_q^T = \int_{x_1}^{x_2} q \mathbf{N}^T \, dx \quad \text{lub} \quad \mathbf{r}_q = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N} q \, dx$$

wstawiając do powyższego rozwiniętą postać funkcji kształtu \mathbf{N} otrzymamy:

$$\mathbf{r}_q = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} -\frac{x-x_2}{l} q \, dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{x-x_1}{l} q \, dx \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{r}_q = \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wektor \mathbf{r}_q przedstawia sobą przybliżenie obciążenia ciągłego przez przyłożenie połowy siły generowanej przez wydatek do obydwu węzłów elementu.

- Praca wykonana przez siły skupione przyłożone w węzłach:

$$W_p = R_1 u_1 + R_2 u_2$$

czyli w zapisie macierzowym:

$$W_p = (R_1 \quad R_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow W_p = \mathbf{r}_p^T \mathbf{d} \equiv \mathbf{d}^T \mathbf{r}_p$$

gdzie \mathbf{r}_p jest wektorem obciążenia węzłowego:

$$\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

Energia potencjalna równa jest:

$$\Pi = U - W_q - W_p$$

uwzględniając wyprowadzenia przedstawione powyżej otrzymamy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{r}_q - \mathbf{d}^T \mathbf{r}_p$$

wyciągając wspólny czynnik przed nawias wyrażenie na energię potencjalną przyjmuje postać:

$$\Pi = \mathbf{d}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right)$$

Warunek minimum energii potencjalnej wyrazi się jako pochodna cząstkowa energii względem przemieszczeń w węzłach elementu (*w celu zachowania większej przejrzystości, sposób obliczenia pochodnej przedstawiono w UZUPEŁNIENIU 2 na kolejnej stronie*):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right) + \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} = 0$$

porządkując wyrażenie otrzymuje się równanie elementu prętowego w ujęciu MES:

$$\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{r}_q + \mathbf{r}_p$$

lub

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

gdzie:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad - \text{wektor przemieszczeń węzłowych}$$

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{macierz sztywności elementu}$$

$$\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad - \text{wektor sił węzłowych}$$

$$\mathbf{r}_q = \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \text{wektor sił w węzłach od obciążenia ciągłego}$$

UZUPEŁNIENIE 1

Potęę pierwszej pochodnej przemieszczenia (założonego rozwiązania) należy policzyć w taki sposób, aby przemieszczenia \mathbf{d} węzłów wyciągnąć przed całkę:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{B}^T \mathbf{d} \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^T \frac{\partial u}{\partial x} = (\mathbf{B}^T \mathbf{d})^T \mathbf{B}^T \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{d}$$

bo $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$ - prawo transpozycji iloczynu macierzy.

UZUPEŁNIENIE 2

Sposób obliczania pochodnych cząstkowych energii potencjalnej względem przemieszczeń węzłowych:

$$\Pi = \mathbf{d}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right) = (u_1 \quad u_2) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right)$$

Pochodna liczona względem przemieszczenia węzła 1:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow (1 \quad 0) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right) + (u_1 \quad u_2) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Pochodna liczona względem przemieszczenia węzła 2:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow (0 \quad 1) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right) + (u_1 \quad u_2) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

budowa układu równań:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right) + (u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ \mathbf{k} jest macierzą symetryczną, to:

$$\mathbf{d}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d}$$

otrzymujemy:

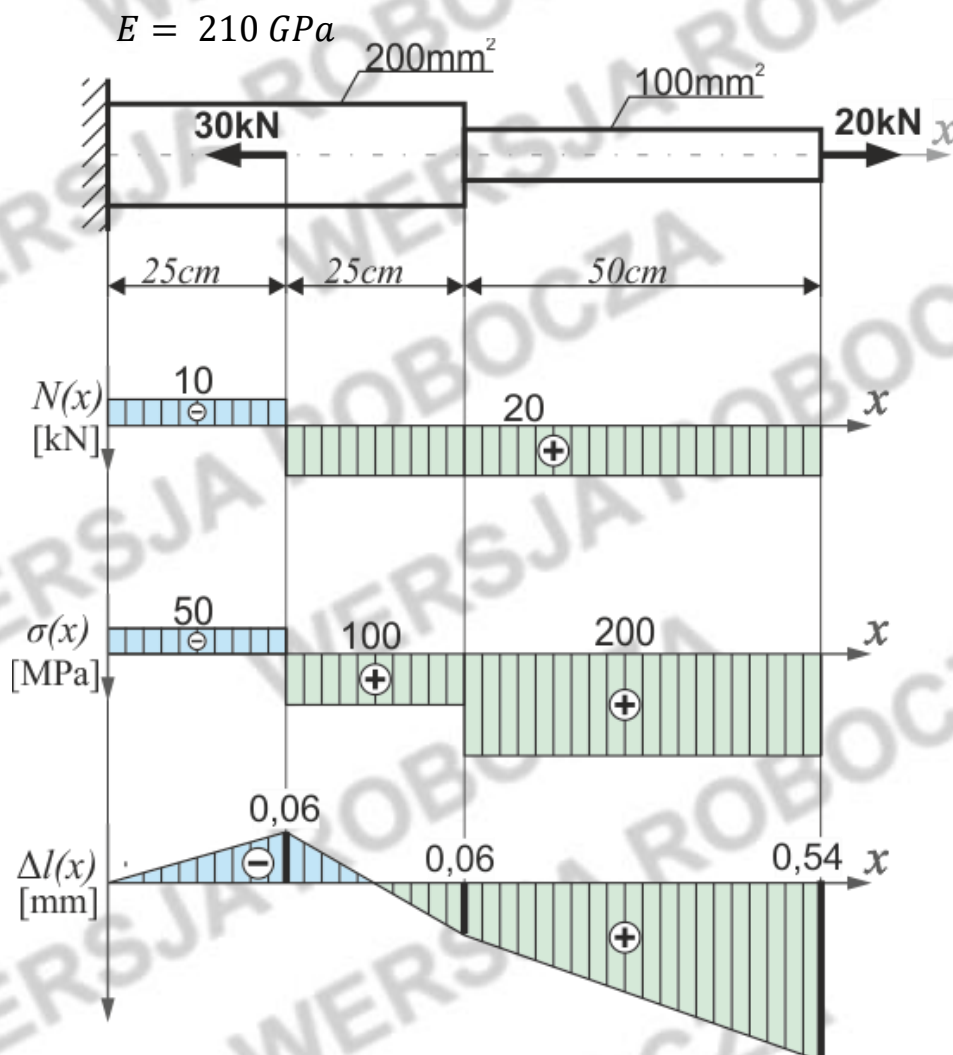
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p \right) + \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} = 0$$

a stąd:

$$\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{r}_q + \mathbf{r}_p$$

Przykład rozwiązania MES dla pręta pryzmatycznego

Na kolejnych stronach zaprezentowano tok obliczeń pręta pryzmatycznego o skokowo zmiennym przekroju obciążonego siłami skupionymi (rys. 6). Na rysunku przedstawiono wykresy przebiegu siły wewnętrznej $N(x)$, naprężenia $\sigma(x)$ oraz przemieszczeń $\Delta l(x)$ uzyskane na drodze obliczeń analitycznych, metodami znanymi z kursu Wytrzymałości Materiałów.



Rys. 6.

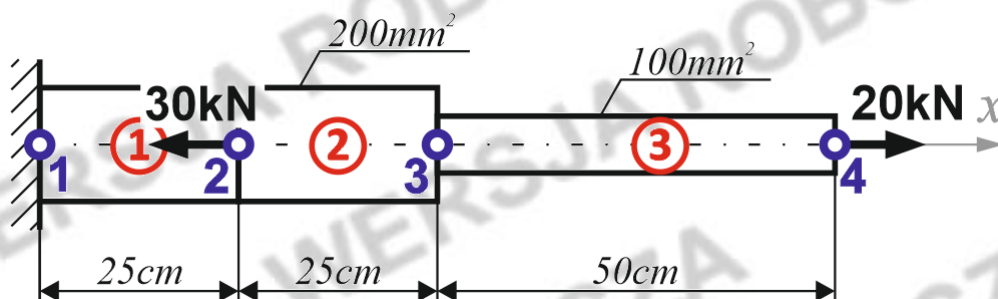
Procedura rozwiązania MES:

1. Dyskretyzacja rozpatrywanego układu – podział na elementy
2. Budowa macierzy sztywności układu
3. Wprowadzenie warunków brzegowych
4. Rozwiązanie ze względu na nieznane przemieszczenia w węzłach
5. Obliczenia pozostałych wielkości węzłowych

Konstrukcję dzielimy na trzy dwuwęzłowe elementy typu prętowego (rys. 6). W każdym z czterech węzłów układu znajduje się jeden stopień swobody, tj. możliwość przemieszczania wzdłuż osi x .

Jedyny dostępny warunek brzegowy to informacja, że skrajny lewy przekrój pręta nie może doznawać przemieszczeń z uwagi na istniejące w tym miejscu utwierdzenie.

Każdemu z trzech elementów przyporządkować należy odpowiednią długość L , oraz sztywność na rozciąganie i ściskanie wyrażoną jako iloczyn EA .



Rys. 7.

Przemieszczenia lokalne i globalne

Przemieszczenia lokalne węzłów poszczególnych elementów odpowiadają przemieszczeniom globalnym (konstrukcji):

$$u_1^{(1)} = u_1, \quad u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2, \quad u_2^{(2)} = u_1^{(3)} = u_3, \quad u_2^{(3)} = u_4$$

Globalne siły węzłowe:

W węźle globalnym numer jeden istnieje siła F_1 odpowiadająca reakcji w utwierdzeniu. W węzłach 2 i 4 obciążenia przyjmują wartość zewnętrznych sił skupionych:

$$F_2 = -30 \text{ kN}, \quad F_4 = 20 \text{ kN}$$

Siła w węźle trzecim nie jest zdeterminowana poprzez żadne warunki, poza statyką układu.

Macierz sztywności elementu w układzie lokalnym:

$$k^{(e)} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie: $e = 1, 2, 3$ – numer elementu.

Macierze sztywności elementów w układzie globalnym:

<u>Element 1</u>	<u>Element 2</u>	<u>Element 3</u>
$K^{(1)} =$ $= \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$K^{(2)} =$ $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$K^{(3)} =$ $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix}$
stopnie swobody lokalne (1,2)	stopnie swobody lokalne (1,2)	stopnie swobody lokalne (1,2)
stopnie swobody globalne (1,2)	stopnie swobody globalne (2,3)	stopnie swobody globalne (3,4)

Globalna macierz sztywności całego układu – powstaje poprzez dodanie do siebie macierzy sztywności poszczególnych elementów w układzie globalnym

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} K^{(e)} \Leftrightarrow K = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}$$

co prowadzi do:

$$K = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix}$$

Dla każdego elementu zapisać można równanie:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}$$

gdzie:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{r}_q + \mathbf{r}_p - \text{wektor sił węzłowych (w rozważanym przypadku } \mathbf{r}_q = \mathbf{0})$$

$\mathbf{K}^{(e)}$ - macierz sztywności elementu

$\mathbf{d}^{(e)}$ - wektor przemieszczeń węzłowych

Równanie układu (konstrukcji):

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe zadania wymagają, aby przemieszczenia węzła 1 było równe zero, stąd:

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu prowadzi do:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

Stąd, po wykonaniu operacji odwracania macierzy i podstawienia danych liczbowych przemieszczenia poszczególnych węzłów wynoszą:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -0,06 \text{ mm}, \quad u_3 = 0,065 \text{ mm}, \quad u_4 = 0,54 \text{ mm}$$

Następnie wartości sił w węzłach, w układzie globalnym, wyznaczyć można jako:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1,68 & -1,68 & 0 & 0 \\ -1,68 & 3,36 & -1,68 & 0 \\ 0 & -1,68 & 2,10 & -4,20 \\ 0 & 0 & -4,20 & 4,20 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0,06 \\ 0,06 \\ 0,54 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Wartości sił węzłowych w układzie lokalnym wynikają z równania elementu:

$$\begin{pmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{pmatrix}$$

po podstawieniu danych zadania:

$$\begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ kN}, \quad \begin{pmatrix} R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{(3)} \\ R_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Odształcenie elementów wyznaczyć można jako:

$$\epsilon^{(e)} = \frac{\Delta l_2^{(e)} - \Delta l_1^{(e)}}{L^{(e)}}$$

Otrzymujemy:

$$\epsilon^{(1)} = -2,38 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon^{(2)} = -4,76 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon^{(3)} = -9,52 \cdot 10^{-4}$$

Znajomość prawa fizycznego wiążącego odkształcenie z naprężeniem prowadzi do:

$$\sigma^{(e)} = E\epsilon^{(e)}$$

$$\sigma^{(1)} = -50 \text{ MPa}, \quad \sigma^{(2)} = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma^{(3)} = 200 \text{ MPa}$$

dzięki czemu możliwym jest znalezienie sił wewnętrznych w elementach:

$$N^{(e)} = \sigma^{(e)}A^{(e)}$$

$$N^{(1)} = -10 \text{ kN}, \quad N^{(2)} = N^{(3)} = 20 \text{ kN}$$

LITERATURA

1. Bhatti M.A.: *Fundamental Finite Element Analysis and Applications*, Wiley, 2005
2. Ferreira A.J.M.: *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*, Springer, 2009
3. Kattan P.: *MATLAB Guide to Finite Elements: An interactive Approach*, Springer, 2008
4. Rakowski T., Kasprzyk Z.: *Metoda Elementów Skończonych w Mechanice Konstrukcji*, OWPW Warszawa 1993
5. Rakowski T.: *Macierzowa Analiza Konstrukcji*, PWN, 1979