

Politechnika Rzeszowska  
**Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa**

Katedra Inżynierii Lotniczej i Kosmicznej

Pomoce dydaktyczne

z przedmiotu:

**Metoda Elementów Skończonych**

**Element trójkątny w płaskim stanie naprężenia**

*Wersja robocza dokumentu*

*Ewentualne uwagi, sugestie lub wykryte błędy w tekście proszę kierować na*

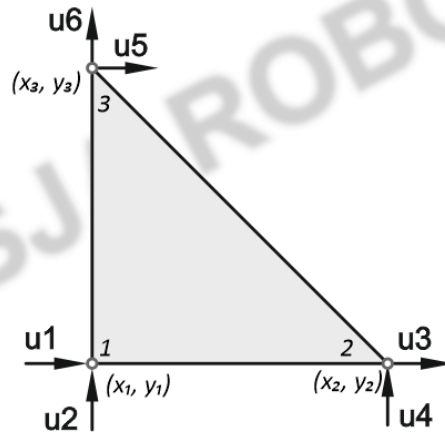
*adres: [lukasz.swiech@prz.edu.pl](mailto:lukasz.swiech@prz.edu.pl)*

**Łukasz Święch**

Rzeszów, 2023

### Element trójkątny typu CST (Constant Strain Triangle)

Element składa się z trzech węzłów. W każdym węźle występują dwa translacyjne stopnie swobody.



Rys. Schemat elementu trójkątnego

Pole przemieszczeń zakłada się w postaci :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) u_i$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) v_i$$

gdzie:

$$u_i = [u_1 \quad u_3 \quad u_5]$$

$$v_i = [u_2 \quad u_4 \quad u_6]$$

oraz  $N_i$  są liniowymi funkcjami kształtu:

$$N_1 = \frac{1}{2A} \{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y\}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} \{x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y\}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} \{x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y\}$$

Macierz funkcji kształtu:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} N$$

po wstawieniu funkcji kształtu:

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu w odniesieniu do rzeczywistych sił i przemieszczeń:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_A (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h) dx dy$$

$$\mathbf{k} = A h \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$$

gdzie:

macierz sprężystości dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

$E$  – moduł Younga

$\nu$  – współczynnik Poissona

$A$  – pole powierzchni elementu

$h$  - grubość elementu

Składowe stanu naprężenia w elemencie:

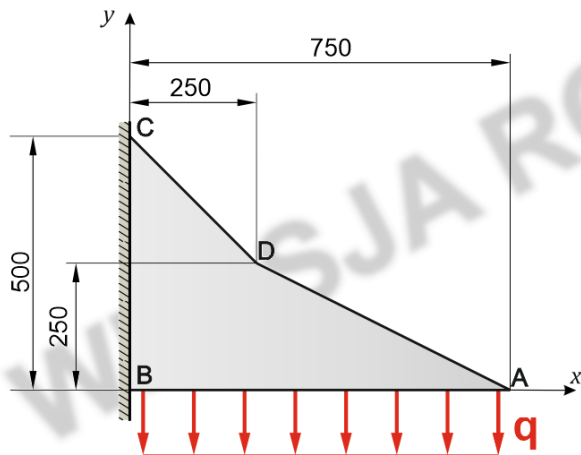
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q}$$

gdzie:

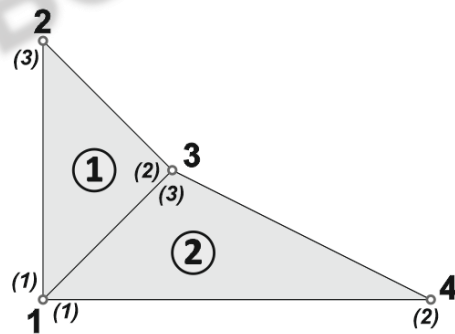
$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6]$$

**Przykład obliczeniowy**

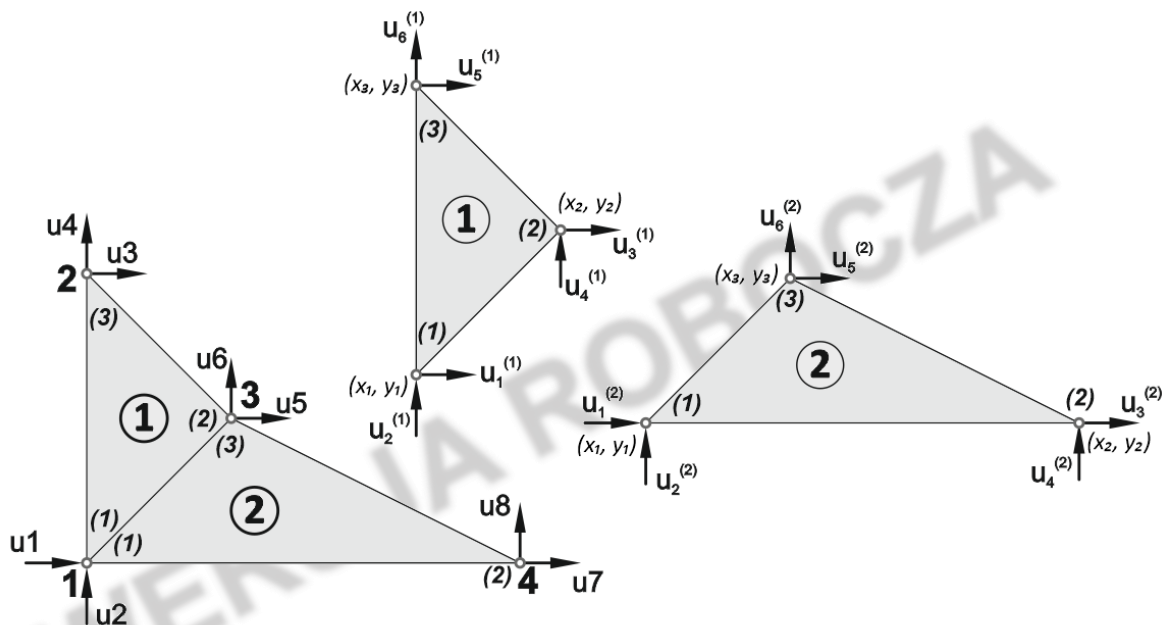
Wykorzystując trójkątne elementy skończone obliczyć przemieszczenia węzłów konstrukcji przedstawionej na rysunku, obciążonej na krawędzi AB wydatkiem o wartości  $q = 125 \text{ N/mm}$ . Przyjąć, że  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ , a grubość elementu to  $h = 5 \text{ mm}$ .



Rys. Schemat zadania



Rys. Podział na elementy skończone



Rys. Numeracja stopni swobody w konstrukcji i w elementach

### Przemieszczenia lokalne i globalne

Przemieszczenia globalne węzłów poszczególnych elementów ( $u_i^{(e)}$ ,  $i = 1, 2$ ) odpowiadają przemieszczeniom globalnym konstrukcji ( $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ):

$$u_1 = u_1^{(1)} = u_1^{(2)}$$

$$u_2 = u_2^{(1)} = u_2^{(2)}$$

$$u_3 = u_5^{(1)}$$

$$u_4 = u_6^{(1)}$$

$$u_5 = u_3^{(1)} = u_5^{(2)}$$

$$u_6 = u_4^{(1)} = u_6^{(2)}$$

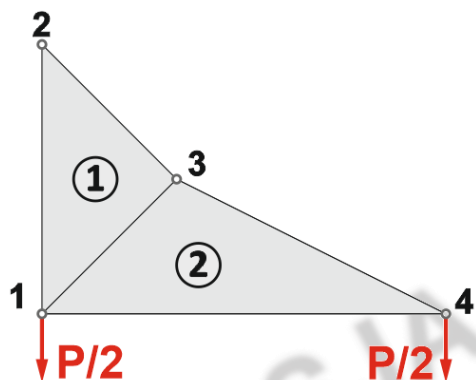
$$u_7 = u_3^{(2)}$$

$$u_8 = u_4^{(2)}$$

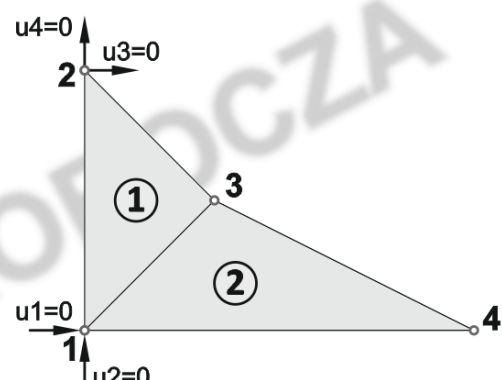
### Globalne siły węzłowe i warunki brzegowe:

W węźle globalnym numer jeden i cztery należy przyłożyć zewnętrzne siły skupione będące połową wartości obciążenia  $P = 125 \text{ N/mm} \cdot 750 \text{ mm} = 93,75 \text{ kN}$  na kierunku pionowym, przeciwnie do zwrotu osi  $y$ .

W węzłach 1 i 2 istnieć muszą siły odpowiadające reakcjom podpór.



Rys. Obciążenie ciągłe zamienione na siły węzłowe



Rys. Uwzględnienie warunków brzegowych

### Macierz sprężystości:

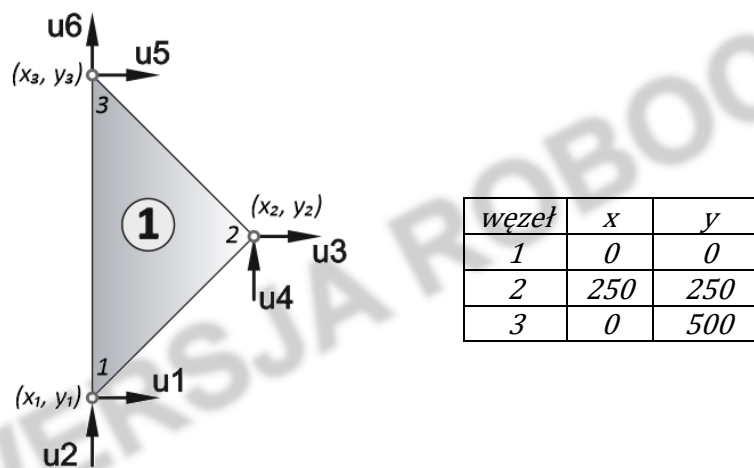
W przykładzie założono stały materiał w całej konstrukcji dlatego:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu stałych materiałowych otrzymamy:

$$D = \begin{bmatrix} 2,31 & 0,69 & 0 \\ 0,69 & 2,31 & 0 \\ 0 & 0 & 0,81 \end{bmatrix} \text{MPa} \cdot 10^5$$

Obliczenia dla Elementu 1:



Pole elementu wyznaczyć można z zależności:

$$A = \left| \frac{x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)}{2} \right|$$

$$A = 62,50 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu oblicza się z zależności:

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Podstawienie danych liczbowych prowadzi do:

$$B1 = \begin{bmatrix} -0,002 & 0 & 0,004 & 0 & -0,002 & 0 \\ 0 & -0,002 & 0 & 0 & 0 & 0,002 \\ -0,002 & -0,002 & 0 & 0,004 & 0,002 & -0,002 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{mm}}$$

Macierz sztywności elementu wyznaczamy z zależności:

$$k = A h B^T D B$$

co prowadzi do:

$$k1 = \begin{bmatrix} 3,89 & 1,88 & -5,77 & -2,02 & 1,88 & 0,14 \\ 1,88 & 3,89 & -1,73 & -2,02 & -0,14 & -1,88 \\ -5,77 & -1,73 & 11,54 & 0 & -5,77 & 1,73 \\ -2,02 & -2,02 & 0 & 4,04 & 2,02 & -2,02 \\ 1,88 & -0,14 & -5,77 & 2,02 & 3,89 & -1,88 \\ 0,14 & -1,88 & 1,73 & -2,02 & -1,88 & 3,89 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 10^5$$

Macierz sztywności elementu 1 w układzie konstrukcji otrzymamy jako:

$$K = a^T k a$$

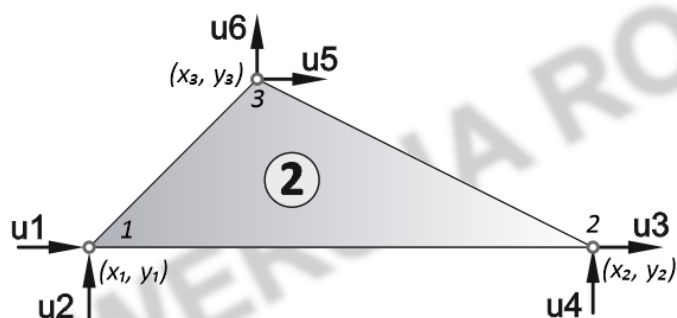
gdzie  $a$  jest macierzą alokacji:

$$a_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymamy:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3,89 & 1,88 & 1,88 & 0,14 & -5,77 & -2,02 & 0 & 0 \\ 1,88 & 3,89 & -0,14 & -1,88 & -1,73 & -2,02 & 0 & 0 \\ 1,88 & -0,14 & 3,89 & -1,88 & -5,77 & 2,02 & 0 & 0 \\ 0,14 & -1,88 & -1,88 & 3,89 & 1,73 & -2,02 & 0 & 0 \\ -5,77 & -1,73 & -5,77 & 1,73 & 11,54 & 0 & 0 & 0 \\ -2,02 & -2,02 & 2,02 & -2,02 & 0 & 4,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 10^5$$

Obliczenia dla Elementu 2:



węzeł	x	y
1	0	0
2	750	0
3	250	250

Pole elementu wyznaczyć można z zależności:

$$A = 93,75 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu:

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0,0013 & 0 & 0,0013 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0027 & 0 & -0,0013 & 0 & 0,004 \\ -0,0027 & -0,0013 & -0,0013 & 0,0013 & 0,004 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{mm}}$$

Macierz sztywności elementu 2:

$$k_2 = \begin{bmatrix} 4,62 & 2,5 & -0,58 & -0,77 & -4,04 & -1,73 \\ 2,5 & 8,37 & -0,48 & 3,17 & -2,02 & -11,54 \\ -0,58 & -0,48 & 2,6 & -1,25 & -2,02 & 1,73 \\ -0,77 & 3,17 & -1,25 & 2,6 & 2,02 & -5,77 \\ -4,04 & -2,02 & -2,02 & 2,02 & 6,06 & 0 \\ -1,73 & -11,54 & 1,73 & -5,77 & 0 & 17,31 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 10^5$$

Macierz alokacji elementu 2:

$$a_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu 2 w układzie konstrukcji:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 4,62 & 2,5 & 0 & 0 & -4,04 & -1,73 & -0,58 & -0,77 \\ 2,5 & 8,37 & 0 & 0 & -2,02 & -11,54 & -0,48 & 3,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4,04 & -2,02 & 0 & 0 & 6,06 & 0 & -2,02 & 2,02 \\ -1,73 & -11,54 & 0 & 0 & 0 & 17,31 & 1,73 & -5,77 \\ -0,58 & -0,48 & 0 & 0 & -2,02 & 1,73 & 2,6 & -1,25 \\ -0,77 & 3,17 & 0 & 0 & 2,02 & -5,77 & -1,25 & 2,6 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 10^5$$

Macierz sztywności układu:

$$K = K_1 + K_2$$

$$K = \begin{bmatrix} 8,51 & 4,38 & 1,88 & 0,14 & -9,81 & -3,75 & -0,58 & -0,77 \\ 4,38 & 12,26 & -0,14 & -1,88 & -3,75 & -13,56 & -0,48 & 3,17 \\ 1,88 & -0,14 & 3,89 & -1,88 & -5,77 & 2,02 & 0 & 0 \\ 0,14 & -1,88 & -1,88 & 3,89 & 1,73 & -2,02 & 0 & 0 \\ -9,81 & -3,75 & -5,77 & 1,73 & 17,6 & 0 & -2,02 & 2,02 \\ -3,75 & -13,56 & 2,02 & -2,02 & 0 & 21,35 & 1,73 & -5,77 \\ -0,58 & -0,48 & 0 & 0 & -2,02 & 1,73 & 2,6 & -1,25 \\ -0,77 & 3,17 & 0 & 0 & 2,02 & -5,77 & -1,25 & 2,6 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 10^5$$

Wyznaczenie przemieszczeń węzłowych możliwe jest poprzez rozwiązanie układu:

$$Kd = f \Rightarrow d = K^{-1}f$$



po uwzględnieniu warunków brzegowych, które polega na wykreśleniu wierszy i kolumn odpowiadających odebrany stopniom swobody.

W rozważanym przykładzie procedura ta prowadzi do:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9.8077 & -3.75 & -5.7692 & 1.7308 & 17.5962 & 0 & -2.0192 & 2.0192 \\ -3.75 & -13.5577 & 2.0192 & -2.0192 & 0 & 21.3462 & 1.7308 & -5.7692 \\ -0.5769 & -0.4808 & 0 & 0 & -2.0192 & 1.7308 & 2.5962 & -1.25 \\ -0.7692 & 3.1731 & 0 & 0 & 2.0192 & -5.7692 & -1.25 & 2.5962 \end{bmatrix} \cdot \frac{N}{\text{mm}} \cdot 10^5 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 = \frac{P}{2} \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 = -\frac{P}{2} \end{bmatrix}$$

$$Kd = f \quad \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.76 \cdot 10^6 & 0 & -2.02 \cdot 10^5 & 2.02 \cdot 10^5 \\ 0 & 2.13 \cdot 10^6 & 1.73 \cdot 10^5 & -5.77 \cdot 10^5 \\ -2.02 \cdot 10^5 & 1.73 \cdot 10^5 & 2.6 \cdot 10^5 & -1.25 \cdot 10^5 \\ 2.02 \cdot 10^5 & -5.77 \cdot 10^5 & -1.25 \cdot 10^5 & 2.6 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \frac{N}{\text{mm}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46875 \end{bmatrix} N$$

$$d = K^{-1}f \quad \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1.76 \cdot 10^6 & 0 & -2.02 \cdot 10^5 & 2.02 \cdot 10^5 \\ 0 & 2.13 \cdot 10^6 & 1.73 \cdot 10^5 & -5.77 \cdot 10^5 \\ -2.02 \cdot 10^5 & 1.73 \cdot 10^5 & 2.6 \cdot 10^5 & -1.25 \cdot 10^5 \\ 2.02 \cdot 10^5 & -5.77 \cdot 10^5 & -1.25 \cdot 10^5 & 2.6 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \frac{N}{\text{mm}} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46875 \end{bmatrix} N$$

Po odwróceniu macierzy K otrzymamy:

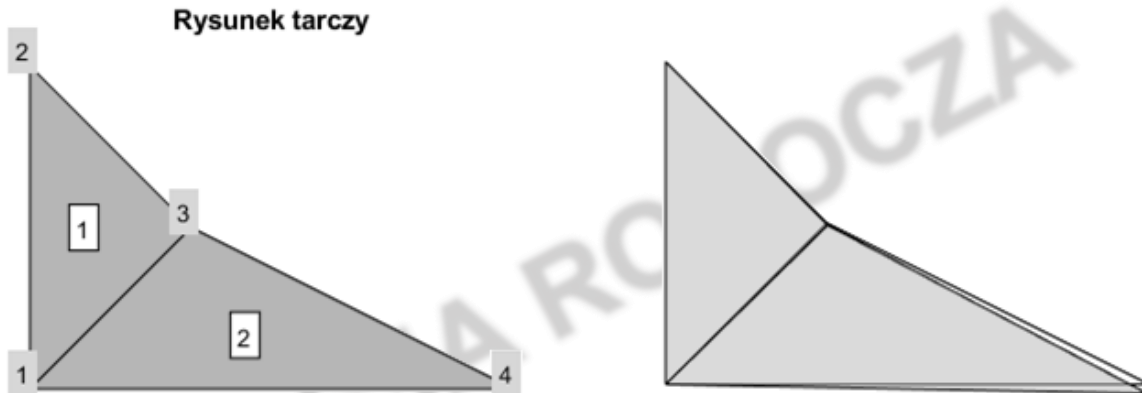
$$\begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.39 \cdot 10^{-7} & -3.66 \cdot 10^{-7} & 1.97 \cdot 10^{-7} & -1.29 \cdot 10^{-6} \\ -3.66 \cdot 10^{-7} & 1.44 \cdot 10^{-6} & 5.6 \cdot 10^{-7} & 3.75 \cdot 10^{-6} \\ 1.97 \cdot 10^{-7} & 5.6 \cdot 10^{-7} & 5.4 \cdot 10^{-6} & 3.68 \cdot 10^{-6} \\ -1.29 \cdot 10^{-6} & 3.75 \cdot 10^{-6} & 3.68 \cdot 10^{-6} & 1.49 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \frac{\text{mm}}{N} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46875 \end{bmatrix} N$$

Po rozwiązaniu równania otrzymamy:

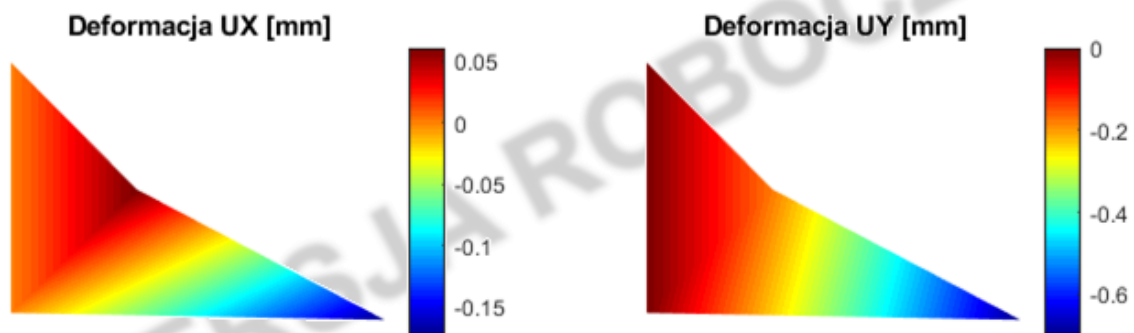
$$d = \begin{bmatrix} 0.061 \\ -0.175 \\ -0.173 \\ -0.701 \end{bmatrix} \text{mm}$$

Ostatecznie, wektor **przemieszczeń węzłowych**:

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.061 \\ -0.175 \\ -0.173 \\ -0.701 \end{bmatrix} \text{ mm}$$



Rys. Schematyczne przedstawienie deformacji tarczy (skala 20:1)



Rys. Rozkład składowych przemieszczenia na powierzchni tarczy

Siły węzłowe obliczamy jako:

$$f = Kd$$

co prowadzi do:

$$f = \begin{bmatrix} 70312.5 \\ 999.224 \\ -70312.5 \\ 45875.776 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46875 \end{bmatrix} \text{ N}$$

gdzie siły  $f_1$  do  $f_4$  są wielkościami sił reakcji w podporach układu.

Składowe stanu naprężenia w elemencie obliczyć można jako:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = D\varepsilon = DBq$$

gdzie:

$$q^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6]$$

Wartości **naprężeń głównych** wyznaczyć można jako:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Dla Elementu 1:

$$q^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_3 \quad u_4]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55,86 \\ 16,76 \\ -56,64 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96,23 \\ -23,62 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Dla Elementu 2:

$$q^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_5 \quad u_6]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37,24 \\ 37,76 \\ -37,24 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,11 \\ -52,58 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

### Deformacja pomiędzy węzłami:

Wykorzystując funkcje kształtu możliwym jest obliczenie składowych przemieszczenia w dowolnym punkcie ciała, jako:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) u_i; \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) v_i$$

gdzie  $N_i$  są funkcjami kształtu, a  $u_i, v_i$  obliczonymi przemieszczeniami węzłowymi.

Przykładowo dla punktu położonego w połowie dolnej krawędzi elementu 2 o współrzędnych:

$$(x, y) = (375, 0) \text{ mm}$$

przemieszczenie ma składowe:

$$u = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_7 + N_3 \cdot u_5 = -0,0867 \text{ mm}$$

$$v = N_1 \cdot u_2 + N_2 \cdot u_8 + N_3 \cdot u_6 = -0,3504$$

### LITERATURA

1. Bhatti M.A.: *Fundamental Finite Element Analysis and Applications*, Wiley, 2005
2. Ferreira A.J.M.: *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*, Springer, 2009
3. Kattan P.: *MATLAB Guide to Finite Elements: An interactive Approach*, Springer, 2008
4. Kopecki H., Kopecki T., Świąch Ł.: *Zagadnienia wytrzymałości konstrukcji lotniczych*, Oficyna Wydawnicza PRz 2023
5. Rakowski T., Kasprzyk Z.: *Metoda Elementów Skończonych w Mechanice Konstrukcji*, OWPW Warszawa 1993
6. Rakowski T.: *Macierzowa Analiza Konstrukcji*, PWN, 1979