Politechnika Rzeszowska

Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa

Katedra Inżynierii Lotniczej i Kosmicznej

Pomoce dydaktyczne

z przedmiotu:

Metoda Elementów Skończonych

Podstawy MES na przykładzie rozwiązania układu sprężyn

Wersja robocza dokumentu

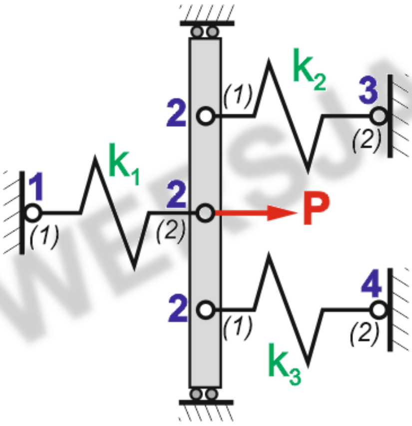
Ewentualne uwagi, sugestie lub wykryte błędy w tekście proszę kierować na adres: lukasz.swiech@prz.edu.pl

Łukasz Święch

Rzeszów, 2023

Podstawy MES

W celu ogólnego zaprezentowania metody przedstawione zostanie rozwiązanie układu trzech sprężyn (rys. 1) połączonych nieskończenie sztywną belką, do której przyłożono siłę o wartości P.



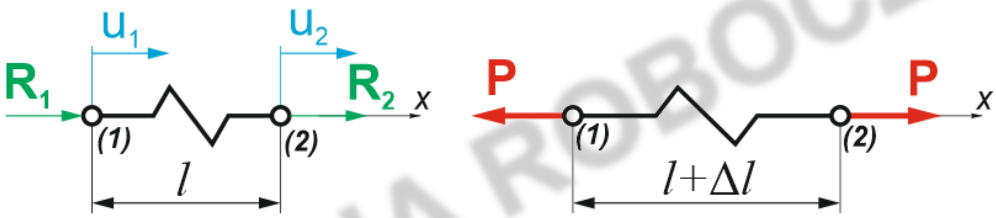
Oznaczenia:

(1), (2) – oznaczenie lokalne węzłów

1,2,3,4 – oznaczenie globalne węzłów

Rys.1

Układ składa się zatem z trzech dwuwęzłowych elementów (rys. 2) o dwóch stopniach swobody będących przemieszczeniami w węzłach (u_1, u_2). W węzłach elementu istnieją siły węzłowe R_1 i R_2.



Rys. 2. Schemat elementu dwuwęzłowego

Wydłużenie elementu przedstawionego na rysunku 2 wyrazić można jako:

$$\Delta l = u_2 - u_1 \tag{1}$$

Wykorzystując wzór Hooke'a otrzymamy relację łączącą obciążenie P z wydłużeniem, gdzie miarą proporcjonalności jest sztywność sprężyny k:

$$P = k\,\Delta l = k(u_2 - u_1) \tag{2}$$

Element musi pozostawać w równowadze statycznej, zatem:

$$R_2 = -R_1 = P \tag{3}$$

Otrzymamy zatem układ równań wiążący ze sobą siły, przemieszczenia, sztywność oraz geometrię elementu, będące jednocześnie warunkami równowagi statycznej:

$$\begin{aligned} R_1 &= -k(u_2 - u_1) \\ R_2 &= \quad k(u_2 - u_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Porządkując równanie 3 do postaci:

$$\begin{aligned} R_1 &= k(u_1 - u_2) \\ R_2 &= k(-u_1 + u_2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

w zapisie macierzowym przedstawić je można jako:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

równanie 3.2 zapisać można również jako:

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{Bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

gdzie:

$k^{(e)}$ – sztywność sprężyny „e”

lub w postaci ogólnej:

$$\boldsymbol{f}^{(e)} = \boldsymbol{K}^{(e)} \boldsymbol{d}^{(e)} \tag{3.4}$$

gdzie:

$\boldsymbol{f}^{(e)}$ - wektor sił węzłowych

$\boldsymbol{K}^{(e)}$ - macierz sztywności elementu

$\boldsymbol{d}^{(e)}$ - wektor przemieszczeń węzłowych

Równania równowagi dla poszczególnych sprężyn (elementów) dla układu z rysunku 1:

- Równanie sprężyny 1 (k1): $\begin{pmatrix} \boldsymbol{R_1}^{(1)} \\ \boldsymbol{R_2}^{(1)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}^{(1)} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1}^{(1)} \\ \boldsymbol{u_2}^{(1)} \end{pmatrix}$
- Równanie sprężyny 2 (k2): $\begin{pmatrix} \boldsymbol{R_1}^{(2)} \\ \boldsymbol{R_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}^{(2)} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1}^{(2)} \\ \boldsymbol{u_2}^{(2)} \end{pmatrix}$
- Równanie sprężyny 3 (k3): $\begin{pmatrix} \boldsymbol{R_1}^{(3)} \\ \boldsymbol{R_2}^{(3)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}^{(3)} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1}^{(3)} \\ \boldsymbol{u_2}^{(3)} \end{pmatrix}$

Przemieszczenia lokalne i globalne

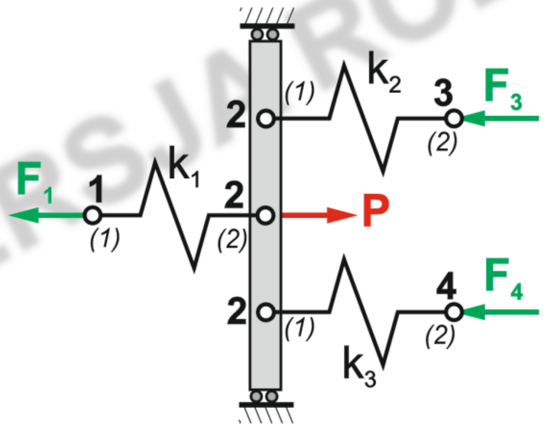
Przemieszczenia lokalne węzłów poszczególnych elementów odpowiadają przemieszczeniom globalnym (konstrukcji):

$$u_1{}^{(1)} = u_1, \quad u_2{}^{(1)} = u_1{}^{(2)} = u_1{}^{(3)} = u_2\,, \quad u_2{}^{(2)} = u_3, \quad u_2{}^{(3)} = u_4$$

Siły węzłowe

Siła w każdym węźle globalnym musi być równa sumie sił węzłowych odpowiednich węzłów elementów:

$$\sum_{e=1}^{n_e} R^{(e)} = R_j$$



Rys. 3

Węzeł globalny 1:

$$\sum_{e=1}^{3} R^{(e)} = F_1 \iff R_1{}^{(1)} = F_1$$

Węzeł globalny 2:

$$\sum_{e=1}^{3} R^{(e)} = P \iff R_2{}^{(1)} + R_1{}^{(2)} + R_1{}^{(3)} = P$$

Węzeł globalny 3:

$$\sum_{e=1}^{3} R^{(e)} = F_3 \iff R_2{}^{(2)} = F_3$$

Węzeł globalny 4:

$$\sum_{e=1}^{3} R^{(e)} = F_4 \iff R_2{}^{(3)} = F_4$$

Macierz sztywności elementu w układzie lokalnym:

Element posiada dwa węzły (stopnie swobody)

$$\boldsymbol{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{(e)} & -\boldsymbol{k}_{(e)} \\ -\boldsymbol{k}_{(e)} & \boldsymbol{k}_{(e)} \end{bmatrix} \quad lub \quad \boldsymbol{K}^{(e)} = \boldsymbol{k}_{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Globalna macierz sztywności:

Rozpatrywana konstrukcji – cztery węzły (stopnie swobody)

<u>**Sprężyna 1 (element 1)**</u>	<u>**Sprężyna 2 (element 2)**</u>	<u>**Sprężyna 3 (element 3)**</u>
$\boldsymbol{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k_1} & -\boldsymbol{k_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{k_1} & \boldsymbol{k_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k_2} & -\boldsymbol{k_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{k_2} & \boldsymbol{k_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k_3} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{k_3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{k_3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k_3} \end{bmatrix}$
stopnie swobody lokalne (1,2) stopnie swobody globalne (1,2)	stopnie swobody lokalne (1,2) stopnie swobody globalne (2,3)	stopnie swobody lokalne (1,2) stopnie swobody globalne (2,4)

Transformacja lokalnej macierzy sztywności do postaci globalnej

W celu zapisania macierzy sztywności elementu w układzie globalnym, który odnosi się do całej konstrukcji posłużyć się można tzw. macierzą alokacji $\boldsymbol{a_e}$, która definiuje zależność pomiędzy lokalną a globalną macierzą sztywności:

$$\boldsymbol{K}^{(e)} = \boldsymbol{a_e}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{k_e} \boldsymbol{a_e}$$

Zależność między lokalną a globalną macierzą sztywności dla elementu 1:

$$\boldsymbol{K}^{(\mathbf{1})} = \boldsymbol{a_1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{k_1} \boldsymbol{a_1}$$

Lokalna macierz sztywności elementu 1:

$$\boldsymbol{k_1} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

Macierz alokacji dla elementu 1:

węzeł 1 elementu 1

numeracja globalna

numeracja lokalna

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

węzeł 2 elementu 1

stąd:

$$\boldsymbol{K}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zależność między lokalną a globalną macierzą sztywności dla elementu 2:

$$\boldsymbol{K}^{(\mathbf{2})} = \boldsymbol{a_2}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{k_2} \boldsymbol{a_2}$$

Macierz alokacji dla elementu 2:

węzeł 1 elementu 2

numeracja globalna

numeracja lokalna

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

węzeł 2 elementu 2

$$\boldsymbol{K}^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogicznie dla elementu numer 3:

$$\boldsymbol{K}^{(3)} = \boldsymbol{a_3}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{k_3} \boldsymbol{a_3}$$

$$\boldsymbol{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Globalna macierz sztywności całego układu – powstaje poprzez dodanie do siebie sztywności poszczególnych elementów w układzie globalnym

$$\boldsymbol{K} = \sum_{\boldsymbol{e}=1}^{\boldsymbol{n_e}} \boldsymbol{K}^{(\boldsymbol{e})}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{(1)} + \boldsymbol{K}^{(2)} + \boldsymbol{K}^{(3)}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Równanie układu (konstrukcji):

$$\boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{f}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe zadania wymagają, aby przemieszczenia węzłów 1,3 i 4 były równe zeru, stąd:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

W ogólnym przypadku równanie przekształcić należy do postaci:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}$$

Rozwiązanie układu w rozpatrywanym przykładzie prowadzi do:

$$(k_1 + k_2 + k_3)\, u_2 = P$$

stąd u_2 będące przemieszczeniem węzła drugiego konstrukcji wynosi:

$$u_2 = \frac{P}{k_1 + k_2 + k_3}$$

Następnie wartości reakcji w węzłach 1, 3 i 4 wyznaczyć można jako:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

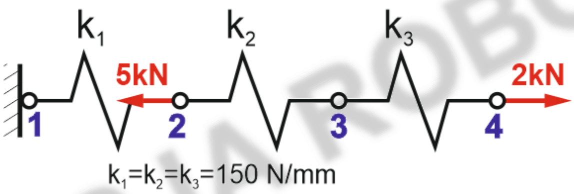
stąd:

$$F_1 = -k_1\, u_2, \qquad F_3 = -k_2\, u_2, \qquad F_4 = -k_3\, u_2$$

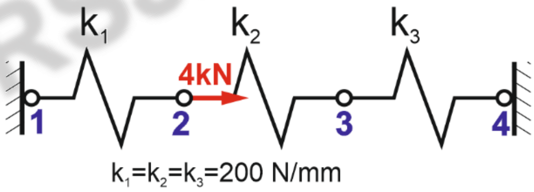
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Dla układów sprężyn przedstawionych na rysunkach poniżej wyznaczyć przemieszczenia poszczególnych węzłów:

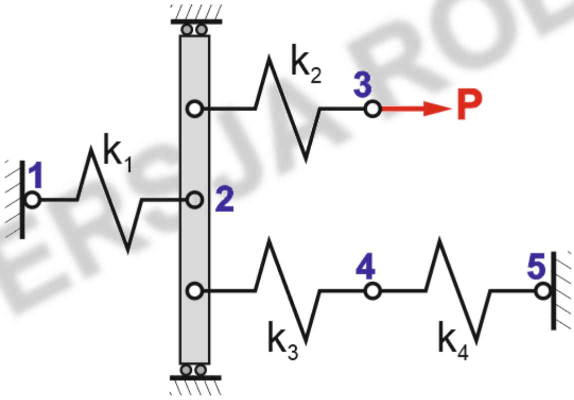
a)



b)



c)

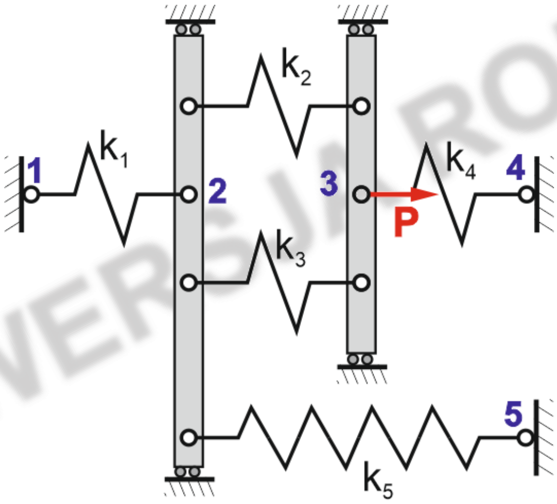


$$P = 3\ kN,$$

$$k = 100\ N/mm,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$$

d)



$$P = 5\ kN,$$

$$k_1 = k_4 = 100\ N/mm$$

$$k_2 = 100\ N/mm$$

$$k_3 = k_5 = 200\ N/mm$$

Odpowiedzi:

a) Przemieszczenia węzłów (znak plus oznacza przemieszczenie „w prawo”):

1	2	3	4
0 mm	-20 mm	-6,67 mm	6,67 mm

b) Przemieszczenia węzłów:

1	2	3	4
0 mm	13,33 mm	6,67 mm	0 mm

c) Przemieszczenia węzłów:

1	2	3	4	5
0 mm	20 mm	50 mm	10 mm	0 mm

Przykład c dla danych:

$$\boldsymbol{P = 2kN,\ k_1 = 200N/mm,\ k_2 = 500N/mm, k_3 = k_4 = 100N/mm}$$

Przemieszczenia węzłów:

1	2	3	4	5
0 mm	8 mm	12 mm	4 mm	0 mm

d) Przemieszczenia węzłów:

1	2	3	4	5
0 mm	10 mm	20 mm	0 mm	0 mm

LITERATURA

1. Bhatti M.A.: *Fundamental Finite Element Analysis and Applications*, Wiley, 2005
2. Ferreira A.J.M.: *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*, Springer, 2009
3. Kattan P.: *MATLAB Guide to Finite Elements: An interactive Approach*, Springer, 2008
4. Kopecki H., Kopecki T., Święch Ł.: Zagadnienia wytrzymałości konstrukcji lotniczych, Oficyna Wydawnicza PRz 2023
5. Madier D. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers, FEA Academy 2020
6. Rakowski T., Kasprzyk Z.: *Metoda Elementów Skończonych w Mechanice Konstrukcji, OWPW Warszawa 1993*
7. Rakowski T.: *Macierzowa Analiza Konstrukcji*, PWN, 1979