



**POLITECHNIKA  
RZESZOWSKA**  
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA



**WYDZIAŁ  
BUDOWY MASZYN  
I LOTNICTWA**  
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Politechnika Rzeszowska  
**Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa**

Katedra Samolotów i Silników Lotniczych

Pomoce dydaktyczne  
*Wytrzymałość Materiałów*

**Metoda analityczno–wykreślna**  
**wyznaczania linii ugięcia belek**

Łukasz Święch

*Rzeszów, 2024*

## 1. Podstawy teoretyczne

Metoda analityczno–wykreślana, zwana również metodą momentów wtórnych, stosowana jest w przypadkach gdy celem jest wyznaczenie ugięć i kątów ugięcia tylko w konkretnych przekrojach belki.

Istotą metody jest przyjęcie założenia, że rzędne wykresu momentów gnących  $M_g$  stanowią obciążenie fikcyjne (wtórne)  $q_f$ .

Dla belki o stałym przekroju ( $EI_z = \text{const}$ ):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_g}{EI_z} \Rightarrow \frac{d^2(EI_z y)}{dx^2} = -q_f$$

Wiemy również, że obciążenie ciągłe jest równe pierwszej pochodnej siły tnącej, a zatem drugiej pochodnej momentu gnącego:

$$q_f = -\frac{dT_f}{dx} = -\frac{d^2 M_f}{dx^2}$$

Porównując podane zależności otrzymamy:

$$\frac{d^2(EI_z y)}{dx^2} = -\left(-\frac{d^2 M_f}{dx^2}\right); \quad \frac{d(EI_z y)}{dx} = \frac{dM_f}{dx} + C; \quad EI_z y = M_f + Cx + D$$

Z powyższych zależności wynika, że jeżeli jesteśmy w stanie tak dobrać warunki brzegowe belki fikcyjnej aby  $C = 0$  i  $D = 0$ , to **ugięcie belki rzeczywistej** obliczymy jako:

$$EI_z y = M_f \Rightarrow y = f = \frac{M_f}{EI_z}$$

**kąt ugięcia belki rzeczywistej** równy będzie:











$$\frac{d(EI_z y)}{dx} = \frac{dM_f}{dx} = T_f \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{T_f}{EI_z} \Rightarrow \theta = \frac{T_f}{EI_z}$$

### Dobór belki zastępczej:

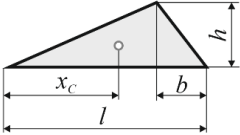
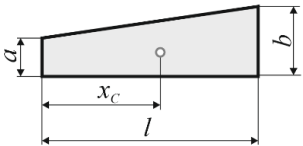
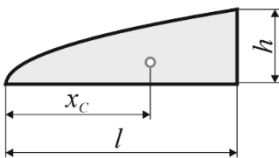
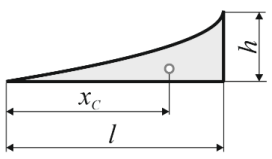
W celu wyrugowania stałych  $C$  i  $D$ , proces obliczeń prowadzi się nie dla belki rzeczywistej, a pewnej umownej belki zwanej zastępczą lub fikcyjną, która winna spełniać następujące warunki:

1. Jeżeli w pewnym punkcie belki rzeczywistej ugięcie jest równe zero ( $y = 0$ ), to w odpowiadającym mu punkcie belki zastępczej moment zastępczy musi równać się zero ( $M_f = 0$ ). Natomiast jeżeli  $y \neq 0$  to i  $M_f \neq 0$ .
2. Jeżeli w pewnym punkcie belki rzeczywistej kąt obrotu linii ugięcia równa się zero ( $\theta = 0$ ), to w odpowiadającym mu punkcie belki zastępczej siła tnąca musi być także równa zero ( $T_f = 0$ ). Natomiast jeżeli  $y \neq 0$  to i  $M_f \neq 0$ .

Tab. 1. Sposoby zamocowania belki fikcyjnej

Lp.	Fragment belki rzeczywistej	Warunki brzegowe	Wartości obciążenia fikcyjnego	Fragment belki fikcyjnej
1	Podpora stała lub przesuwna na końcu belki 	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $T_f \neq 0$	 Podpora stała lub przesuwna na końcu belki
2	Utwardzony koniec belki 	$y = 0$ $\theta = 0$	$M_f = 0$ $T_f = 0$	 Swobodny koniec belki
3	Swobodny koniec belki 	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_f \neq 0$ $T_f \neq 0$	 Utwardzony koniec belki
4	Stać lub przesuwna podpora pośrednia 	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $T_f \neq 0$	 Przegub
5	Przegub 	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_f \neq 0$ $T_f \neq 0$	 Stała lub przesuwna podpora pośrednia

Tab.2. Położenie środków ciężkości niektórych figur

Figura	Oznaczenia	Pole figury	Położenie środka ciężkości
Trójkąt		$A = \frac{l \cdot h}{2}$	$x_c = \frac{2l - b}{3}$
Trapez		$A = \frac{a + b}{2} \cdot l$	$x_c = \frac{(a + 2b) \cdot l}{3 \cdot (a + b)}$
Pole ograniczone parabolą drugiego stopnia		$A = \frac{2}{3} l \cdot h$	$x_c = \frac{5}{8} l$
Pole ograniczone parabolą drugiego stopnia		$A = \frac{l \cdot h}{3}$	$x_c = \frac{3}{4} l$

## 2. Przykłady liczbowe

### Zad. 1.

Wyznaczyć ugięcie oraz kąt ugięcia w punkcie B belki wspornikowej (rys. 1a) o długości  $l = 1m$ , obciążonej na swobodnym końcu siłą skupioną o wartości  $P = 5kN$ .

Do obliczeń przyjąć  $E = 210 GPa$ ,  $I = 15 cm^4$ .

Rozkład momentu gnącego belki rzeczywistej (rys. 1b) opisuje równanie:

$$Mg(x) = -M_A + R_A \cdot x; \quad x \in (0, l) \quad [pkt A \rightarrow B]$$

Wykres momentu gnącego stanowi obciążenie  $q_f$  belki fikcyjnej.

Belkę fikcyjną zbudować należy w następujący sposób:

- w miejscu utwierdzenia belki rzeczywistej (pkt A) warunki brzegowe to  $y_A = 0$  i  $\Theta_A = 0$ , w belce fikcyjnej należy spełnić warunki  $M_{fA} = 0$  i  $T_{fA} = 0$ , zatem w miejscu tym nie należy stosować jakiegokolwiek podpory,
- odwrotna sytuacja ma miejsce w punkcie B, gdzie dla belki fikcyjnej zastosować należy utwierdzenie, które dodatkowo spowoduje spełnienie warunków równowagi statycznej.

Wypadkowa obciążenia wtórnego wynosi:

$$Q_f = \frac{1}{2} \cdot l \cdot Pl = \frac{1}{2} Pl^2; \quad x_c = \frac{2}{3} l$$

Reakcje wtórne:

$$R_{fB} = T_{fB} = \frac{1}{2} Pl^2; \quad M_{fB} = Mg_{fB} = \frac{1}{3} Pl^3$$

Kąt ugięcia jest zatem równy:

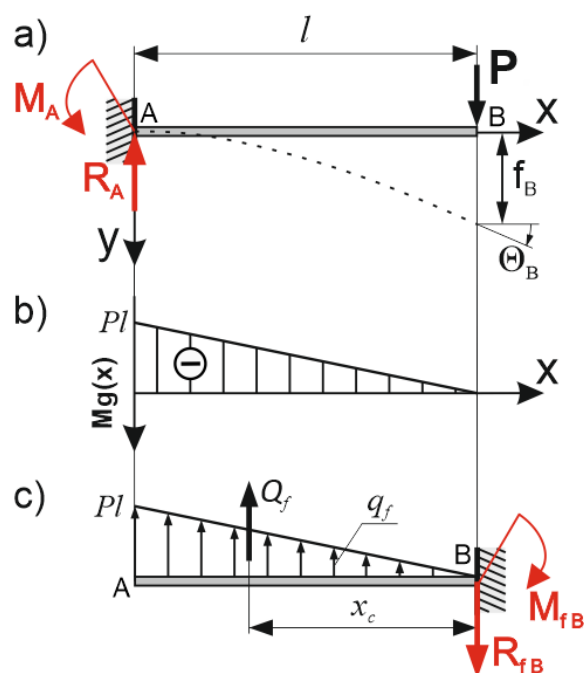
$$\Theta_B = \frac{T_{fB}}{EI} \Rightarrow \Theta_B = \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\Theta_B \approx 4,5^\circ$$

Ugięcie w punkcie B wynosi:

$$f_B = \frac{Mg_{fB}}{EI} \Rightarrow f_B = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$f_B \approx 50 mm$$



Rys. 1

**Zad. 2.**

Stalową belkę o przekroju dwuteowym ( $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $I = 1510 \text{ cm}^4$ ) o długości 8 m obciążono w punkcie C siłą skupioną o wartości  $P = 10 \text{ kN}$  i podparto na obu końcach według schematu przedstawionego na rys. 2a. Wyznaczyć ugięcie i kąt ugięcia belki w punkcie B.

Z warunków równowagi statycznej belki rzeczywistej wyznaczyć należy wartości reakcji:

$$R_A = \frac{1}{4}P; \quad R_D = \frac{3}{4}P$$

Moment gnący w belce rzeczywistej (rys. 2b):

$$Mg(x_1) = R_A \cdot x_1;$$

gdzie  $x_1 \in (0, 6l)$  [pkt A  $\rightarrow$  C]

$$Mg(x_2) = R_D \cdot x_2;$$

gdzie  $x_2 \in (0, 2l)$  [pkt D  $\rightarrow$  C]

Belkę fikcyjną (rys. 2c) stworzyć należy według opisanych wyżej zasad (tab. 1) oraz obciążyć wydatkiem o przebiegu  $Mg(x)$  dla belki rzeczywistej.

Ugięcie i kąt ugięcia w punkcie B belki fikcyjnej wyznacza się jako:

$$f_B = \frac{Mg_{fB}}{EI}; \quad \theta_B = \frac{T_{fB}}{EI}$$

gdzie, zgodnie z rys. 2d:

$$T_{fB} = R_{fA} - Q_{fB}$$

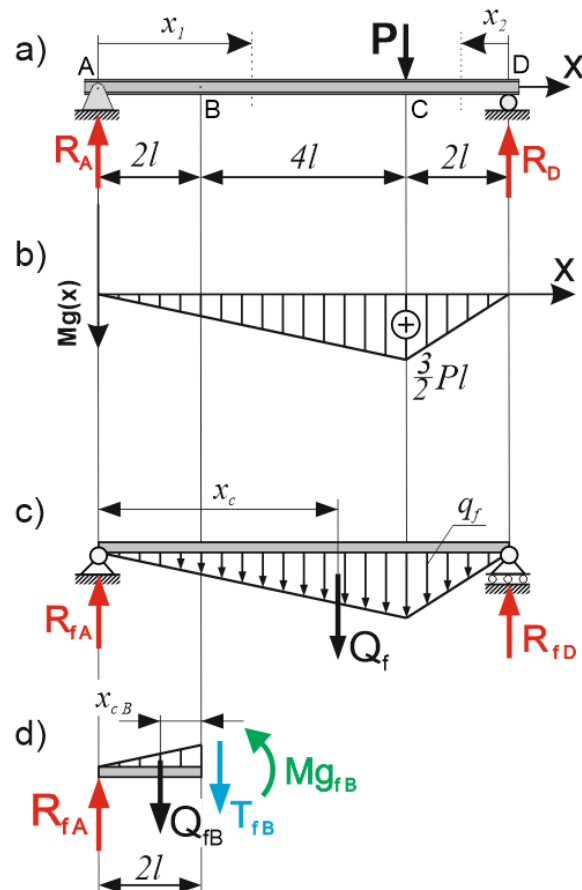
$$Mg_{fB} = R_{fA} \cdot 2l - Q_{fB} \cdot x_{cB}$$

W celu wyznaczenia powyższych wielkości niezbędnym jest określenie, z warunków równowagi belki fikcyjnej reakcji w punkcie A:

$$\sum M_{f(D)} = 0 \Leftrightarrow -R_{fA} \cdot 8l + Q_f \cdot (8l - x_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{fA} = \frac{Q_f \cdot (8l - x_c)}{8l}$$

gdzie zgodnie z tablicą 2:

$$Q_f = \frac{1}{2} \cdot 8l \cdot \frac{3}{2}Pl = 6Pl^2; \quad x_c = -\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 8l - 2l) = -\frac{14}{3}l$$



Rys. 2.

Reakcja fikcyjna w punkcie A wyniesi zatem:

$$R_{fA} = \frac{6Pl^2 \cdot (8l - \frac{14}{3}l)}{8l} = \frac{5}{2}Pl^2$$

Wypadkowa obciężenia wtórnego na odcinku pomiędzy punktami A i B:

$$Q_{fB} = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot Mg(x_1)_{x_1=2l} = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}Pl = \frac{1}{2}Pl^2; \quad x_{cB} = \frac{2}{3}l$$

Siła tnąca i moment gnący w punkcie B:

$$T_{fB} = R_{fA} - Q_{fB} = \frac{5}{2}Pl^2 - \frac{1}{2}Pl^2 = 2Pl^2$$

$$Mg_{fB} = R_{fA} \cdot 2l - Q_{fB} \cdot x_{cB} = \frac{5}{2}Pl^2 \cdot 2l - \frac{1}{2}Pl^2 \cdot \frac{2}{3}l = \frac{14}{3}Pl^3$$

Kąt ugięcia w punkcie B jest zatem równy:

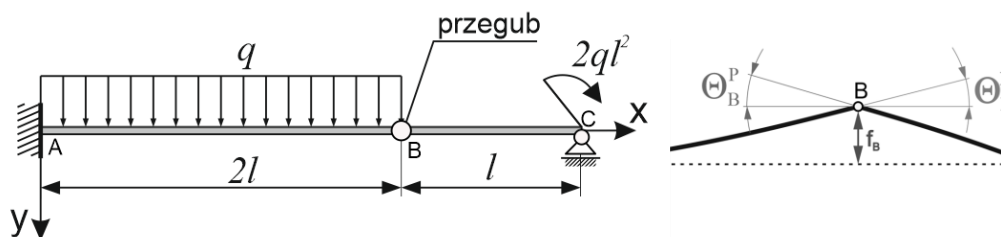
$$\theta_B = 2 \frac{Pl^2}{EI} = 0,0063 \approx 0,36^\circ$$

Ugięcie w punkcie B wynosi:

$$f_B = \frac{14}{3} \frac{Pl^3}{EI} = 14,7 \text{ mm}$$

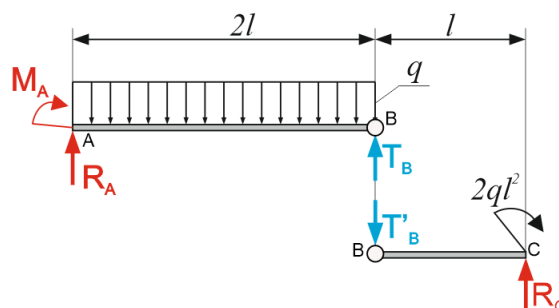
## Zad 3

Wyznaczyć strzałkę ugięcia oraz kąt ugięcia w przegubie (pkt. B) belki przedstawionej na rysunku 3.1.



Rys. 3.1. Schemat belki

Sposób podparcia belki skutkuje istnieniem w układzie trzech niezerowych wartości sił i momentów podporowych. W celu ich wyznaczenia należy myślowo podzielić belkę na dwie części, przy założeniu, że w punkcie B (przegub) moment równy jest zero.



Rys. 3. 2. Myślowy podział belki na dwa układy statycznie wyznaczalne

Równania równowagi statycznej dla części lewej:

$$\Sigma M_{(A)} = 0 \Leftrightarrow T_B \cdot 2l - q \cdot 2l \cdot l - M_A = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0 \Leftrightarrow -M_A - R_A \cdot 2l + q \cdot 2l \cdot l = 0$$

Równania równowagi statycznej dla części prawej:

$$\Sigma M_{(B)} = 0 \Leftrightarrow R_C \cdot l - 2ql^2 = 0$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0 \Leftrightarrow T_B \cdot l - 2ql^2 = 0$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymamy:

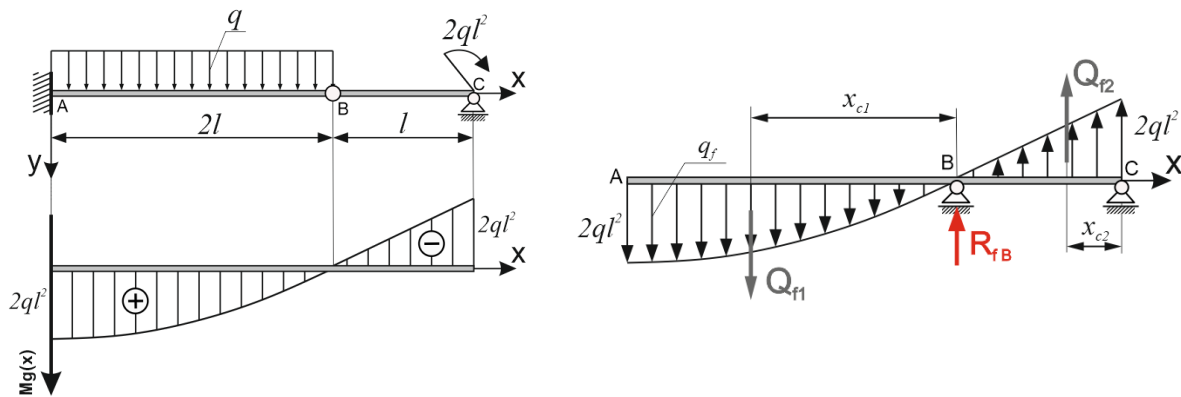
$$M_A = 2ql^2, \quad R_A = 0, \quad R_C = 2ql, \quad T_B = 2ql$$

Znając wartości reakcji możliwym staje się wyznaczenie rozkładu momentu gnącego wzdłuż rozpiętości belki:

$$Mg(x_1) = M_A + R_A \cdot x_1 - q \frac{x_1^2}{2}; \quad x_1 \in (0, 2l) \quad [\text{pkt } A \rightarrow B]$$

$$Mg(x_2) = M_A + R_A \cdot (2l + x_2) - q \cdot 2l \cdot (l + x_2); \quad x_2 \in (0, l) \quad [\text{pkt } B \rightarrow C]$$

Kolejnym krokiem rozwiązania jest budowa belki fikcyjnej (tab. 1) i obciążenie jej wydatkiem o rozkładzie zgodnym z obliczonymi wartościami momentu gnącego (rys. 3.3).



Rys.3.3 Rozkład momentu gnącego wzdłuż rozpiętości belki oraz belka fikcyjna

Obciążenie ciągłe zastąpić można siłami skupionymi o wartościach:

$$Q_{f1} = \frac{2}{3} \cdot 2l \cdot 2ql^2 = \frac{8}{3}ql^3; \quad x_{c1} = \frac{5}{8} \cdot 2l = \frac{5}{4}l$$

$$Q_{f2} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot 2ql^2 = ql^3; \quad x_{c2} = \frac{1}{3}l$$

Kąt ugięcia i ugięcie w punkcie B obliczamy jako:

$$\Theta_B = \frac{T_{fB}}{EI}; \quad f_B = \frac{Mg_{fB}}{EI}$$

Z warunku równowagi statycznej dla belki fikcyjnej:

$$\Sigma M_{f(C)} = 0 \Leftrightarrow Q_{f1} \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot 2l + l\right) - R_{fB} \cdot l - Q_{f2} \cdot \frac{1}{3}l = 0 \Rightarrow R_{fB} = \frac{17}{3}ql^3$$

Siła tnąca po lewej stronie przegubu równa jest:

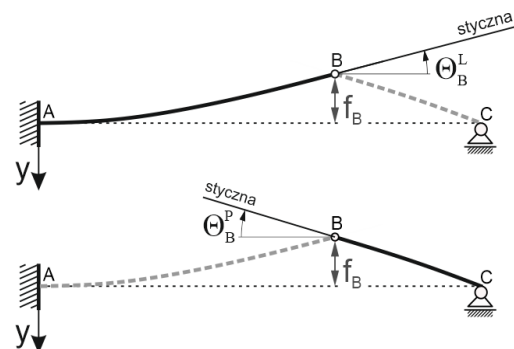
$$T_{fB}^L = -\frac{8}{3}ql^3$$

Natomiast siła tnąca z prawej strony:

$$T_{fB}^P = -\frac{8}{3}ql^3 + \frac{17}{3}ql^3 = 3ql^3$$

stąd:

$$\Theta_B^L = -\frac{8ql^3}{3EI}; \quad \Theta_B^P = 3\frac{ql^3}{EI}$$



Rys. 3.4. Oznaczenia deformacji

Strzałkę ugięcia w punkcie B obliczyć można znając wartość momentu gnącego:

$$Mg_{fB} = -\frac{8}{3}ql^3 \cdot \frac{5}{8} \cdot 2l = -\frac{10}{3}ql^4 \Rightarrow f_B = -\frac{10ql^4}{3EI}$$



## LITERATURA

1. Bodnar A.: *Wytrzymałość materiałów : podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej , 2004*
2. Brzoska Z.: *Wytrzymałość Materiałów, PWN, 1972*
3. Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość Materiałów, WNT 1972*
4. Hibbeler R.C.: *Mechanics of Materials, Pearson Prentice Hall 2014*
5. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: *Wytrzymałość Materiałów, PWN 2013*
6. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: *Zadania z wytrzymałości materiałów, PWN 2013*